

Gedanken zur Digitalisierung des Mathematikunterrichts aus der Sicht des Werkzeugbegriffs

Ysette Weiss

Der Einsatz digitaler Werkzeuge scheint für den Mathematikunterricht besonders naheliegend, da Algorithmen sowohl in der Mathematik eine große Bedeutung haben als auch für digitale Techniken grundlegend sind. Gleichwohl zeigen Jahrzehnte andauernde Bemühungen, den Computer mathematisches Verständnis fördernd einzusetzen, dass dies vor allem dann gelingt, wenn schon ein konzeptuelles Verständnis der weiterzuentwickelnden Begriffe vorhanden ist. Anhand einiger Beispiele zeigen wir, dass algorithmische Herangehensweisen an Lernprozesse nicht die Folge der Einführung digitaler Werkzeuge sind. Die Reduktion der Besonderheiten des Lernens auf mechanistische, maschinenlesbare Prozesse finden wir bereits im programmierten Unterricht und verstärkt in seiner modernen Umsetzung in Form von E-Learning. In diesem Zusammenhang gehen wir kurz auf die gegenwärtige unreflektierte Forcierung technischer Entwicklungen digitaler Werkzeuge als lernförderliche Maßnahmen ein.

1. Einführendes

Wer sich dem Thema der Verwendung digitaler Medien im Unterricht nähert, ist mit einer schwer zu überschauenden Zahl theoretischer Konzepte sowie Bedienungsanleitungen und technischen Beschreibungen zum schulpraktischen Gebrauch digitaler Werkzeuge konfrontiert. Diese oft unreflektierten Empfehlungen des Einsatzes digitaler Medien folgen dem Grundsatz, den Einsatz von Computern im Unterricht grundsätzlich als Bereicherung zu sehen.

Im Folgenden wollen wir uns auf die Nutzung digitaler Medien im Mathematikunterricht beschränken und dem Paradigma „Computer als universelles Werkzeug“ eine Sicht entgegenstellen, die anstatt der isolierten Betrachtung des Werkzeuges

die Entwicklung mathematischer Tätigkeiten durch Handlungen mit verschiedenen Werkzeugen zum Untersuchungsgegenstand hat.

Der Mathematikunterricht ist aus unserer Sicht dafür besonders geeignet, da die große Bedeutung von Algorithmen in der Mathematik die Nutzung digitaler Medien als naheliegend erscheinen lässt und Bemühungen der Umsetzung der Integration des Werkzeugs Computer in den Mathematikunterricht eine Tradition von mehr als einem halben Jahrhundert haben (siehe z.B. Tietze et al. 1982, 42f.; Ziegenbalg et al. 2016).

Wir beginnen mit einem kurzen Überblick über diese Periode der Unterrichtsentwicklung. Danach werfen wir einen Blick auf einige wirtschaftliche und bildungspolitische Interessen bezüglich der Nutzung von Computern in der Schule. Abschließend betrachten wir exemplarisch einige typische mathematische Handlungen unter den Aspekten verschiedener vermittelnder Werkzeuge mit dem Ziel eines besseren Verständnisses der Entwicklung dieser Tätigkeiten.

2. Rückblick: Computernutzung im Mathematikunterricht

Seit Beginn der 1960er Jahre und dem Aufkommen der ersten Computer und Taschenrechner im Mathematikunterricht wird der Einsatz dieser neuen Technologien als Möglichkeit der Verbesserung des Begriffsverständnisses in der Schulmathematik gesehen. Die begriffliche Nähe des grundlegenden mathematischen Konzepts Algorithmus und wichtiger curricularer Inhalte wie Rekursion, Iteration, Simulation zu Arbeitsweisen des Computers begründen diese Sichtweise. Dabei erfolgten maschinelle Zugänge zu schulmathematischen Inhalten sowohl vermittelt über materielle Werkzeuge (z.B. Einsatz von Taschenrechnern zur Berechnung reeller Größen) als auch internalisiert (z.B. als „Maschinchen“ zur Darstellung funktionaler Zusammenhänge oder als Schema des algorithmischen Problemlösens) auf einigen Gebieten der Schulmathematik (z.B. Schröder & Uchtmann 1975, 35f.; Schwartze 1980, 18f.).

Die wissenschaftlichen Taschenrechner (WTR), die außer den Grundrechenarten auch die Berechnung mathematischer Funktionen gestatten, wurden in den 80er Jahren an weiterführenden Schulen als Rechenhilfe eingeführt. Die Einbeziehung der Funktionsweisen dieser Rechner oder formaler Schemata und Verfahren aus der Programmierung (wie z.B. Flussdiagramme) in den Mathematikunterricht war

zu diesem Zeitpunkt wieder weitgehend aus dem Unterricht verschwunden oder in die Diskussion zu möglichen Inhalten eines Informatikunterrichts verlagert worden.

Die Entwicklung der Nutzung des WTR wurde in den 90ern und Anfang des Millenniums vor allem durch dessen technische Entwicklung bestimmt: die Verbesserung der Funktionalität des Displays und der Eingabe, Bruchrechnung, numerisches Differenzieren, Integrieren, Erstellen von Wertetabellen.

In der Schulpraxis änderte sich bzgl. der computerspezifischen Problemstellungen, der Lehrkonzepte und der Inhalte wenig. Die systematische Nutzung von Taschenrechnern erfolgte in den Haupt- und Realschulen meist erst ab Klassenstufe 8, in Gymnasien ab Klassenstufe 9, nachdem man davon ausgehen konnte, dass das algebraische Verständnis von Zahlenbereichen, Rechenoperationen und -gesetzen hinreichend gefestigt war. Hauptsächlich erfolgte der Einsatz der Taschenrechner für Berechnungen mit etwas „unbequemerer“ Zahlen sowie das Ablesen von Funktionswerten und Formeln aus Tafelwerken ersetzend.

Eine indirekte Beeinflussung des Aufgabendesigns erfolgte auch durch die Zulassung wissenschaftlicher Taschenrechner als Hilfsmitteln in Abituraufgaben. „Unbequeme“ aber „realistisch“ anmutende Zahlengrößen ermöglichten es, Einkleidungen als Sachaufgaben oder Modellierungen erscheinen zu lassen. Solche Aufgabenformate wirkten durch eine realistische, alltagsnahe Erscheinungsform mathematischer Probleme auch dem verbreiteten Ruf der Mathematik entgegen, ein wenig nützlich und anwendbares Fach zu sein. Die numerischen Möglichkeiten des WTR wurden in Abituraufgaben kaum genutzt, was auch mit der fehlenden Vergleichbarkeit der verschiedenen Modelle begründet wurde (siehe auch Weigand 2006).

Die mit der *Neuen Mathematik* – einer Unterrichtsreformbewegung der 60er und 70er Jahre – begonnene Algebraisierung der Schularithmetik und der Elementargeometrie endete nicht mit dem „Scheitern“ der Reformbewegung: Die Bildungsgeometrie (Bestandteil der *Neuen Mathematik*) verschwand aus den Lehrplänen; Inhalte, die durch die *Neue Mathematik* verdrängt oder eingeschränkt worden waren, wie sphärische Geometrie und Kegelschnitte, kehrten nicht in die Lehrpläne zurück; aus der Analytischen Geometrie der Oberstufe (auf lineare Gebilde reduziert und algebraisiert) wurde eine lineare Algebra.

Damit entwickelten sich Bedingungen, die eine Entfernung und Loslösung der, den mathematischen Konzepten zugrunde liegenden, arithmetischen und geometrischen Intuition von deren algebraisierten Darstellungen förderte. Die Lehrpläne wurden in zunehmendem Maße durch deduktiv scheinbar gut zu vermittelnde, als formale Sprache leicht abprüfbare, algebraische Kalküle bestimmt. Experimentelle Zugänge mit dynamischer Geometriesoftware (siehe z.B. Richter-Gebert & Kortenkamp 2002, Hohenwarter 2006, Kaenders & Schmidt 2011) scheiterten im Schulalltag nicht nur an fehlenden technischen Voraussetzungen in den Schulen sondern auch an immer weniger vorhandenen geometrischen Grundfertigkeiten der Schüler/innen.

Auch die Einführung des grafikfähigen Taschenrechners und die Integration von Computeralgebrasystemen (CAS) in Taschenrechnern Anfang des Millenniums führte kaum zu Entwicklungen mathematischer Handlungen, welche als Entwicklung der Beziehung Werkzeug – Untersuchungsgegenstand in einer zielgerichteten Tätigkeit verstanden werden können. Die instrumentelle Genese der wissenschaftlichen Taschenrechner, welche für alle Schüler/innen verpflichtend zu erwerben sind, wurde durch ökonomische Faktoren wie Verbraucherfreundlichkeit, Standardisierung und Bequemlichkeit dominiert (Weigand 2015, 271; Weigand & Weth 2002). Eine wechselseitige Anpassung erfolgte nur in Einzelfällen, wie z.B. bei der Entwicklung der dynamischen Geometriesoftware Cinderella und GeoGebra unter Einbeziehung von Lehrkräften, Mathematikern, Informatikern und Didaktikern.

Seit 2004 ist die „adäquate Nutzung“ von Taschenrechnern, Tabellenkalkulation, Geometriesoftware und Funktionsplottern für die Sek I in den KLP NRW festgeschrieben.¹

Einen Überblick zu internationalen Entwicklungen findet man in einem der Nutzung verschiedener Taschenrechner im Unterricht gewidmeten Sammelband (Guin, Ruthven & Trouche 2005). Im Speziellen ist nach den letzten Entwicklungen in Frankreich und der dortigen Entfernung der Mobiltelefone aus Schule und Unterricht (Parlamentsbeschluss 30.07.2018) der Artikel von Trouche (2005) von

¹ Vgl. URL: https://www.schulentwicklung.nrw.de/lehrplaene/lehrplan/47/KLP_GOSt_Mathematik.pdf S. 17f. [12.09.2018].

besonderem Interesse, da Frankreich als eines der ersten europäischen Länder die Nutzung digitaler Werkzeuge im Unterricht auch curricular unterstützte.

3. Rückblick: Mathematikdidaktische Entwicklungen mit Bezug zur Computernutzung

Als Unterrichtsmethode wurde die Arbeitsweise von Lehrmaschinen und später von Computern schon sehr zeitig und nicht nur in der Mathematikdidaktik Vorlage für die Unterrichtsplanung in Form des programmierten Unterrichts. Schon 1926 beschrieb Pressey eine Maschine, die Tests darbietet, sie auswertet und zugleich lehrt (Pressey 1965), m.a.W. eine automatische Auswertung von Multiple Choice Aufgaben mit angepasstem Übungsprogramm, in welcher man einen Vorläufer von E-Learning Modulen sehen kann. Nach Pressley sollte die Maschine die Lehrer/innen von der Routine des Übens entlasten, um sie für die eigentlichen pädagogischen Aufgaben frei zu machen (Pressey 1965, 25). Auch Skinner verfolgte mit einer Reihe von Arbeiten zur Entwicklung von Lehrmaschinen in den 50er Jahren das Ziel, den Lehrer zu unterstützen. Dabei ging es ihm auch um die aus seiner Sicht durch den Massenunterricht gefährdete produktive Beziehung zwischen Lehrer/innen und Schüler/innen (Skinner 1966a, 37). Durch die Annahme, dass durch die automatisierte Rückkopplung einer Lehrmaschine eine bessere und häufigere Verstärkung der Reaktion möglich sei als durch eine mit mehreren Schüler/innen beschäftigte Lehrkraft, veränderte sich jedoch die Funktion der Lehrmaschine von Entlastung der Lehrkraft in großen Gruppen zum Ersetzen dieser (Skinner 1966b, 74ff.). In den fünfziger und sechziger Jahren erfolgte die Ausarbeitung der theoretischen Grundlagen für Lehrmaschinen. Dabei wurden Lehrziele behavioristisch als Modifikation des Verhaltens der Schüler/in durch psychologische Mittel verstanden (vgl. auch Skinner 1966c).

Ein informationstheoretisch-kybernetisches Didaktik-Verständnis auf der Grundlage behavioristischer Modelle wurde teilweise auch durch die Unterrichtsreform *Neue Mathematik* unterstützt, welcher eine aus der universitären Mathematik in den Unterricht übernommene Sicht auf Mathematik als Lehre von Strukturen zugrunde lag. Eine besondere Rolle spielten bei diesem Zugang abstrakte mengentheoretische und algebraische Konzepte (z.B. Bigalke & Hasemann 1977).

Eine kritische Auseinandersetzung mit den theoretischen Grundlagen des programmierten Unterrichtens sowie die Entwicklung eines Lernmodells, welches einerseits die verhaltenspsychologischen Forschungsergebnisse des programmierten Lernens berücksichtigte und andererseits Lernen aus tätigkeitstheoretischer Perspektive beschrieb, erfolgte durch Leont'ev und Gal'perin (Leontjew & Galperin 1966, Galperin 1966). In den 80er Jahren erfuhren die Modelle des programmierten Unterrichtens auch in der Bundesrepublik Deutschland eine kritische Reflexion. Impulse aus der Sonderpädagogik richteten die Aufmerksamkeit auf die Bedeutung der Handlungsorientierung im Unterricht und die Notwendigkeit der Einbeziehung subjektiver Erfahrungen sowie soziokultureller Bedingungen (siehe z.B. Zech 1995). Konstruktivistische, sozial-konstruktivistische und tätigkeitstheoretische Sichtweisen führten zu alternativen, situativen, sich aus der Interaktion entwickelnden Unterrichtsmodellen (Blankerts 1975, Dormolen 1978, Zech 1983). Eine fundamentale Kritik seiner theoretischen Grundlagen erfuhr das programmierte Unterrichten durch die kritische Psychologie:

„Das instrumentelle bzw. operante Konditionieren ist z.B. von Skinner als Mittel zur Erzeugung beliebiger tierischer oder menschlicher Verhaltensweisen durch entsprechende Einrichtung von Verhaltenskonsequenzen konzipiert und (etwa mit der »Skinnerbox« bzw. mit Anordnungen zur »programmierten Unterweisung« etc.) praktisch erprobt worden (daraus entstanden ja mannigfache psychologische Anwendungsfelder, etwa als »Verhaltenstherapie« oder als Schemata zur Verhaltensmodifikation in der Schulklasse)“ (Holzkamp 1993, 63).

Die Analyse dieser Lehrmethode als behavioristisches Stimulus-Response Modell zeigt die besondere Gefahr der Verhaltensmanipulation für den oft deduktiv, aus der Sicht der Fachsystematik, strukturierten Mathematikunterricht. So schreibt Holzkamp:

„Demnach ist es nur konsequent, wenn man zur »Verhaltensmodifikation« nach Möglichkeit solche Umgebungsbedingungen selegiert oder herstellt, in denen den Individuen möglichst geringer Realitätsaufschluß, insbesondere möglichst geringe Einsicht in übergreifende, handlungsrelevante Weltzusammenhänge erlaubt ist, so daß die unter diesen Umständen gesetzten »Verstärkungen« als isolierte Einzelereignisse ihre Wirkung tun können, d.h. von den

Individuen mangels Alternativen zu Handlungsprämissen gemacht werden“ (Holzkamp 1993, 64).

Im Mathematikunterricht werden vor allem in den Operationen und Objekten der Geometrie und der Arithmetik übergreifende, handlungsrelevante Weltzusammenhänge sichtbar und es sind vor allem diese Gebiete, welche den Schüler/innen zahlreiche Möglichkeiten bieten, ihre subjektiven Erfahrungswelten einzubeziehen und so Verhaltensmanipulationen erschweren. Wie beschrieben sind es aber diese Themen, die immer weiter aus dem Mathematikunterricht der Mittel- und Oberstufe verschwinden.

Aus curricularer Sicht haben sich im Mathematikunterricht Strukturen und eine Systematik herausgebildet, die mathematische algebraisierte und algorithmisierte Begriffsentwicklung maschinenlesbar und programmierbar erscheinen und instrumentelle Konditionierung als effektive Unterrichtsmethode möglich werden lassen.

Langfristig gesehen kann man gleichwohl von einem indirekten Einfluss experimenteller Geometrie und realitätsbezogener Ansätze auf die Schulpraxis ausgehen, da sich in den letzten Jahrzehnten entsprechende mathematikdidaktische Forschungsgebiete herausgebildet haben. Aktionsforschung und Design Research in diesen mathematikdidaktischen Themenfeldern erzeugten Impulse für die Lehrerbildung, führten zu Projektarbeit und der Entwicklung von Unterrichtsmaterialien. Letztere hatten und haben jedoch nur einen sehr beschränkten Einfluss auf den Schulalltag. Ein möglicher Grund für den geringen Einfluss dieser experimentellen Ansätze auf die Lernkultur kann auch die geringe Eignung dieser Aufgabenformate als Testaufgaben sein.

In der Psychologie und der Pädagogik entstand u.a. mit der Entwicklung der Vorstellung von neuronalen Netzen, künstlicher Intelligenzen und neuer naturwissenschaftlicher Bezugswissenschaften eine Computer-Metaphorik, die das Lernen als Informationsverarbeitungsprozesse modellierte und Maschinen vermenschlichte (Bächle 2014). Die Durchsetzung des den Naturwissenschaften entlehnten Paradigmas der „Messbarkeit“ führte zu einer Dominanz quantitativer empirischer Methoden und maschinell untersuch- und bearbeitbarer Problemstellungen in der Psychologie und den Bildungswissenschaften. Auch in der Mathematikdidaktik hinterließ diese bildungspolitische Tendenz Spuren und führte zunehmend zu

Forschungsfragen, welche die Effizienz des Bildungswesens sowie Evaluationen und vergleichende Messungen von Schülerleistungen betrafen. Die Orientierung an internationalen Vergleichstests, die wachsende Bedeutung zentraler Tests, die Einführung von Bildungsstandards und Kompetenzorientierung führten zu theoretisch nicht fundierten, weder aus der Sicht der Fachsystematik noch durch aktuelle Bildungsziele begründbaren Veränderungen des Mathematikunterrichts, sowohl bezüglich der Wahl und Anordnung der Inhalte als auch methodischer Konzepte (Kaenders & Weiss 2017, Weiss & Kaenders 2018).

Ungeachtet der erfolgten kritischen Analyse erlebt das programmierte Unterrichten als *Eigenlernen der Schüler/innen* derzeit durch E-Learning in Schulen, Hochschulen und Lehrerfortbildungen eine Wiedergeburt.

Auch infolge des nun seit zwei Jahrzehnten andauernden Mangels an Mathematiklehrer/innen wächst der Bedarf nach Unterrichtsmaterialien und Methoden, welche die Expertise der Lehrperson marginalisieren. So werden Fachkonferenzen in den Schulen immer häufiger angehalten, solche – notwendigerweise ganz kybernetisch aufgebauten – Programme zu entwickeln, die eine Fortführung des Unterrichts auch durch fachfremde Vertretungen im Falle der Erkrankung oder des Ausfalls einer Fachlehrkraft ermöglichen.

4. Digitalisierung und Ökonomisierung des Bildungssystems

Im Oktober 2016 kündigte Bundesbildungsministerin Johanna Wanka einen Digitalpakt an. Danach sollen 40.000 Schulen in Deutschland in den nächsten fünf Jahren mit Computern und WLAN ausgestattet werden. Der Bund wollte dafür bis 2021 fünf Milliarden Euro zur Verfügung stellen.

Bei der Einführung digitaler Techniken und Dienstleistungen in das Bildungswesen werden in diesem Pakt private Anbieter aufgefordert, sich bei Ausstattung, Betrieb und Lehrmaterialien zu engagieren.² Mit diesem Pakt fördert das BMBF also direkt eine stärkere Ökonomisierung des Bildungswesens. Der IT-Industrie wird nicht nur ein neuer Absatzmarkt angeboten, die Forderung nach standardisierten Schnitt-

² Vgl. Strategiepapier des Bundesministeriums für Bildung und Forschung (BMBF) „Bildungsoffensive für die digitale Wissensgesellschaft“ (2016).

stellen und Zentralisierung sorgt sowohl für die Produktion als auch für einen leichten Zugang zum wertvollsten Rohstoff des 21. Jahrhunderts – Daten.

Die Begründungen, welche für das Forcieren der Ökonomisierung und Digitalisierung aller gesellschaftlichen Bereiche angegeben werden, folgen im Wesentlichen der folgenden Logik:

Es wird von sozial-kulturellen Bedingungen ausgegangen, welche als vorhanden oder unausweichlich eintretend deklariert werden, die jedoch erst durch die Ökonomisierung und Digitalisierung des Bildungswesens geschaffen werden sollen.

So geht man davon aus, dass im Takt mit der digital geprägten und globalisierten Welt Lerninhalte zukünftig in deutlich kürzeren Zyklen aktualisiert werden müssen.³ In Anbetracht der wachsenden Menge von Informationen und eines informationstheoretisch-kybernetischen Verständnisses von Lernen als Informationsverarbeitung führt dies „unausweichlich“ zum programmierten und von Computern vermittelten Unterricht:⁴

„2036 werden Eltern schon für ihre fünf Jahre alten Kinder einen virtuellen Lehrer abonnieren. Die Stimme des Computers wird uns durchs Leben begleiten. Vom Kindergarten über Schule und Universität bis zur beruflichen Weiterbildung. Der Computer erkennt, was ein Schüler schon kann, wo er Nachholbedarf hat, wie er zum Lernen gekitzelt wird. Wir werden uns als lernende Menschen neu erfinden. Dabei wird der zu bewältigende Stoff vollkommen auf den Einzelnen zugeschnitten sein“ (Fritz Breithaupt, Professor für Germanistik an der Indiana University in Bloomington)⁵.

Es werden Heilsversprechen unter Zuhilfenahme des Containerbegriffs *Digitale Bildung* gemacht, welcher als Synonym für moderne, erfolgversprechende, sozial gerechte und zukunfts zugewandte Bildung genutzt wird (Pietraß 2017).

³ Vgl. Strategiepapier des Bundesministeriums für Bildung und Forschung (BMBF) „Bildungsoffensive für die digitale Wissensgesellschaft“ (2016, 9).

⁴ In diesem Zusammenhang lohnt es sich Isaak Asimovs Vision des Unterrichts in einer digitalen Zukunft zu lesen <http://visual-memory.co.uk/daniel/funtheyhad.html> [12.09.2018].

⁵ Gastbeitrag in ZEIT Nr. 5, Januar 2016, <https://www.zeit.de/2016/05/schule-computer-lernen-unterricht-digitalisierung> [9.12.2018].

Dabei wird die Bedeutung des Begriffs *digitale Bildung* durch den propagandistischen Umgang mit ihm gesetzt, losgelöst von sozialen und kulturellen Bedingungen und ohne theoretische Fundierung.

„Gemeinsam können Bund und Länder so den Schulen das richtige Werkzeug für gute Bildung im 21. Jahrhundert geben. Auf diese Weise wird nicht nur die Chancengerechtigkeit für die junge Generation verbessert, sondern wir sichern auch die Innovations- und Wettbewerbsfähigkeit unseres Landes.“⁶

Die letztendliche Verantwortung für die Erfüllung der Heilsversprechen wird den Lehrer/innen übertragen, welche aber – nimmt man die Visionen zu ihrer neuen Rolle als Lernbegleiter im digitalisierten Klassenzimmer ernst – gleichzeitig jeglicher Verantwortung für die Gestaltung digitaler Inhalte enthoben werden. Zurückhaltenderen, vor übereilten Umsetzungen warnenden, Praktikern werden fehlender Enthusiasmus, zu wenig Offenheit oder Ängstlichkeit, Überforderung und Reformunwilligkeit unterstellt. Hinweise von Psycholog/innen, Pädagog/innen, Lehrer/innen und Ärzt/innen auf Suchtverhalten, Manipulierbarkeit, Einschränkung kognitiver Entwicklung werden als anekdotische Evidenz abgetan, Studien zu den beschriebenen Phänomenen bagatellisiert (Lankau 2017).

Digital macht schlau! Lernen mit neuen Medien! Mit Tablet-Computern und Online-Zugang haben Lehrer heute die Chance, ein neues Zeitalter der Bildung einzuleiten. Was dafür nötig ist? Beherzte Pädagogen. Und entspannte Eltern. An vielen Schulen gelingt das schon! (Jürgen Schaefer, Geo Magazin)⁷

Die kritische Analyse und theoretische Fundierung der *Maschinenlesbarmachung* von Lehr- und Lernprozessen vor deren technischer Realisierung werden als nicht notwendig und irrelevant angesehen, indem die technischen Umsetzungen im Rahmen der Digitalisierung als eine Art Naturgesetzen folgende Entwicklung dargestellt werden.

⁶ siehe OctoGate – das richtige Werkzeug für gute Bildung im 21. Jahrhundert (didacta 2016)
URL: <https://www.messe-stuttgart.de/didacta/journalisten/pressematerial/octogate-das-richtige-werkzeug-fuer-gute-bildung-im-21-jahrhundert/> [12.09.2018].

⁷ Vgl. URL: <https://www.geo.de/magazine/geo-magazin/1425-rtkl-lernen-mit-neuen-medien-digital-macht-schlau> [9.12.2018].

„Die Digitalisierung ist eine Technologie, die sich weltweit durchsetzt und der wir uns nicht entziehen können. Sie bietet auch für uns und unsere Gesellschaft große Chancen in der Lebens- und Arbeitswelt“ (Anja Karliczek: Technik alleine reicht nicht. Grußwort der Ministerin für Bildung und Forschung. In: JAHRESBERICHT 2017/ 18 der gemeinnützigen GmbH Bildung & Begabung. URL: <https://www.bildung-und-begabung.de/.../jahresbericht-2017-18-magazin> [01.07.2019].

Wie im ersten Teil beschrieben, gelang es trotz längerer Bemühungen und Zusammenarbeit von Lehrer/innen, Pädagog/innen und Didaktiker/innen selbst im Mathematikunterricht erst Ende der Mittelstufe und in der Oberstufe, den Computer so einzusetzen, dass durch seine Nutzung neue Welterkenntnis aus der Perspektive der Mathematik möglich wird. Trotzdem wird die Digitalisierung im Grundschulbereich und sogar im Kindergarten politisch vorangetrieben.

„Schon Kindergartenkinder haben heutzutage selbstverständlich Kontakt mit dem Smartphone. Wenn wir wollen, dass sie damit nicht nur spielen, ist es an uns, ihnen die notwendigen Fähigkeiten an die Hand zu geben. Schließlich werden das Verständnis für digitale Technologien und das Wissen, wie man sie sinnvoll für sich nutzen kann, zunehmend zur Grundlage für aktive soziale und wirtschaftliche Teilhabe (ebd.).“⁸

Wenn also in Zukunft soziale und wirtschaftliche Teilhabe nur für Jugendliche mit frühzeitiger digitaler Mediennutzung möglich sein soll, entsteht die berechtigte Frage, wie heutige oder gar gestrige Schüler/innen oder Studierende in dieser Zukunft zurechtkommen werden. Ob und inwieweit auch die Lehre an Hochschulen digitalisiert werden sollte, ist für die einen eine schon längst beantwortete Frage⁹, für andere die Grundlage zu prinzipiellen Überlegungen. Letztere scheinen dringend notwendig, da wiederbelebte behavioristische Stimulus-Response-

⁸ siehe auch <https://www.stifterverband.org/download/file/fid/6729> [9.12.2018]

⁹ Siehe Tagungsband – „Digitale Lehrformen für ein studierendenzentriertes und kompetenzorientiertes Studium“ des Projekts nexus in Kooperation mit dem Center für Digitale Systeme (CeDiS) der Freien Universität Berlin, Juni 2016. URL: https://www.hrk-nexus.de/fileadmin/redaktion/hrk-nexus/07-Downloads/07-02-Publikationen/Tagungsband_Digitale_Lehrformen.pdf [12.09.2018].

Modelle im Kontext des E-Learning auch in der Hochschuldidaktik an Einfluss gewinnen.

Der Einsatz digitaler Lehr- und Lernangebote bietet eine Vielfalt an Gestaltungsmöglichkeiten, den Studierenden ergänzende Förderungen anzubieten und ihr Arbeitsverhalten über Anreizsysteme gezielt zu steuern (Glasachers 2018).

Sowohl eine umfassende Analyse der ökonomischen Hintergründe der politisch forcierten Digitalisierung der Schulen als auch der technischen Rahmenbedingungen von Netzen und Cloud-Computing kann man bei Ralf Lankau finden (Lankau 2017, 1919, siehe auch Lembke & Leipner 2015, Breyer-Mayländer 2018).

Die Diskussion zur Nutzung digitaler Medien wird außerdem durch die Nutzung des Medienbegriffs in einem Alltagsverständnis und einer fehlenden Unterscheidung zwischen dem Begriff des Mediums und dem des vermittelnden Werkzeugs erschwert (Rückriem 2010). Computer und Internet haben in alle Bereiche der Gesellschaft Einzug gehalten: in Dienstleistung, Produktion, Kunst, Kultur, Freizeitgestaltung, Gesundheitswesen und nun auch in die Bildung. Dabei verändern sich alle diese Bereiche und damit die gesamte Gesellschaft grundlegend (Hübner 2019). Die Frage nach der Digitalisierung des Bildungssektors ist sowohl mit dem Begriff des Mediums verbunden, also den unsichtbaren, nicht materialisierbaren Informations- und Kommunikationssystemen, als auch mit Tätigkeiten von Subjekten, die durch materielle digitale Werkzeuge vermittelt werden. Die Frage, inwieweit auch bei der Nutzung anderer Arten der Kommunikation und des Informationsaustausches in Zukunft soziale und wirtschaftliche Teilhabe möglich sein wird, betrifft den Begriff des Mediums. Den letzten Teil wollen wir der Bedeutung der Wahl verschiedener Werkzeuge beim Erlernen von Mathematik und ihrer besonderen Rolle bei der Entwicklung mentaler Modelle widmen.

5. Der Computer als vermittelndes Werkzeug im Mathematikunterricht

Die Bedeutung des Computers für den Mathematikunterricht wird oft in seinen Möglichkeiten als universelles Werkzeug gesehen. Dabei sind mit Universalität des Werkzeugs sowohl die Funktion als Mittel zum Lösen algorithmisch formulierbarer Probleme als auch die Möglichkeiten als Präsentations- und Kommunikations-Medium gemeint (Laborde & Sträßer 2010, Lagrange et al. 2003, Freiman 2014).

Die Bezeichnung „Universelles Werkzeug“ stellt auch einen Bezug zu den in der Mathematik und der Mathematikdidaktik benutzten Begriff der universellen oder fundamentalen mathematischen Ideen her (Schweiger 1992, Schreiber 1983, Damerow 2003). Letztere beschreiben mathematische Konzepte großer Allgemeinheit und Übertragbarkeit, wie z.B. den Symmetriebegriff, den Abbildungsbegriff oder den Begriff des Algorithmus. Dabei werden Allgemeinheit, als Möglichkeit des Verallgemeinerns und Abstrahierens und Allgemeinheit als universelle Sprache in Form von Algorithmen durch die Nutzung gleicher oder ähnlicher Bezeichner schwer voneinander abgrenzbar.

Die Entwicklung des Abstraktionsvermögens ist ein Bildungsziel des Mathematikunterrichts. So sollen die Schüler/innen z.B. bis Ende der Oberstufe sowohl ein Verständnis einiger algebraischer Eigenschaften von Zahlen (Abgeschlossenheit verschiedener Zahlbereiche bzgl. der Grundrechenoperationen und vom Wurzelziehen, Nullteilerfreiheit) als auch ein konzeptuelles Verständnis zahlentheoretischer Zusammenhänge (Primzahlen, Modulorechnung) und mengentheoretischer Phänomene (z.B. der Abzählbarkeit rationaler Zahlen) entwickelt haben.

Doch was meint diese „abstrakte Vorstellung von Größen“? Die Entwicklung des Zahlbegriffs bei Schüler/innen kann aus einer kulturhistorischen Sicht als eine Entwicklung mentaler Repräsentationen aufsteigender Ordnungen verstanden werden, wobei Repräsentationen erster Ordnung von Operationen und Objekten nahe an dem der Realität entnommenen handelnden Umgang mit materiellen Gegenständen sind (Renn & Damerow 2007). Mit den Verkörperungen (Objekten, Symbolen, Verbildlichungen ...) der Objekte können dabei gemäß gewisser Transformationsregeln die gleichen Handlungen ausgeführt werden wie mit den Objekten selbst.

„Empirische Kenntnisse abstrahieren wir von den Objekten unserer Handlungen und den Veränderungen, die wir an ihnen bewirken und die wir ihnen als immanente Möglichkeiten zuschreiben. Die mathematischen Kenntnisse dagegen abstrahieren wir durch reflektierende Abstraktion von den Strukturen der Koordination unserer Handlungen selbst“ (Damerow & Schmidt 2004, 134).

Historische Beispiele solcher Repräsentationen erster Ordnung für die Herausbildung des Zahlbegriffs sind z.B. Zählsteine. Die Repräsentationen hängen von dem Kulturkreis ab, gemeinsam ist ihnen jedoch, dass Vermehren, Vermindern, Auftei-

len, Abtrennen, Vereinigen statt mit den Objekten selbst mit diesen Repräsentanten als symbolische Handlungen vollzogen werden können (Damerow & Schmidt 2004, 133f.). In der Grundschule können solche Repräsentanten Blättchen, Streichhölzer, Kugeln, aber auch Striche, Punkte oder andere Symbole sein, die sich im Unterricht anbieten, um den Zusammenhang zwischen erfahrenen Veränderungen von Größen und denen der Repräsentanten sichtbar werden zu lassen.

Die in einer Lernsoftware vorgegebenen Repräsentanten sind Visualisierungen von Modellen für Zahlssysteme und nicht durch Abstraktion einer Handlungserfahrung gewonnene Repräsentanten, die Untersuchungsgegenstand für die weitere Reflexion sind. Der Prozess des Abstrahierens kann nicht durch die Internalisierung der Visualisierung einer abstrakten algebraischen Struktur ersetzt werden.

Oft wird für die frühzeitige Verwendung des WTR argumentiert, dass der Taschenrechner den Schüler/innen das mühsame und eintönige Rechnen abnehmen könne, womit Zeit für kreatives konzeptuelles Verständnis gewonnen würde (Weigand 2006). Diese Annahme beruht auf dem Missverständnis, dass das Verständnis der algebraischen und arithmetischen Struktur von Zahlen und Gleichungen in der Kenntnis der Lösung liege und nicht in der Reflexion der Rechenwege.

Auf dem Display sind alle Zahlen gleichartig, eine Anordnung verschiedener Ziffern. Die Sinnstiftung dieser Symbole kann durch Reflexion der Genese oder zusätzliche Kontexte erfolgen, letztere haben jedoch gewöhnlich keinen Bezug zu den Funktionsweisen des Taschenrechners. Die Notwendigkeit des Bezugs mentaler Repräsentationen zu Handlungserfahrungen mit materiellen und materialisierten Lerngegenständen besteht nicht nur für Rechenoperationen, also arithmetische und algebraische Strukturen, sondern auch für geometrische Konzepte.

Ein Zirkel kann z.B. zur Messung der Länge von Strecken, zur Nachahmung einer Pirouette, zum Dartspielen, zum Zeichnen von Ornamenten, zum Abtragen von Längen, zur Konstruktion eines Kreises, der Mittelsenkrechten, der Quadratwurzel einer positiven reellen Zahl verwendet werden.

Ein Werkzeug als Repräsentation einer vergegenständlichten Handlung kann in verschiedenen Handlungskontexten eingesetzt werden, das Werkzeug an sich als Artefakt bestimmt nicht seine Verwendung und erlaubt nur bedingt Aussagen über seine Entwicklung. Es ist die zielgerichtete Tätigkeit, in welcher ein Werkzeug als

Hilfsmittel zur Untersuchung eines Sachverhalts oder Lösung eines Problems dient, welche dem Werkzeug seine konzeptuelle Dimension verleiht. Betrachtet man ein Konstruktionswerkzeug als das beim Konstruieren eines geometrischen Objekts verwendete vermittelnde Werkzeug, so sind damit u.a. auch Tätigkeiten verbunden, welche das geometrische Objekt als vermittelndes Werkzeug benutzen: Um einen Kreis zu zeichnen, muss der Lernende eine Vorstellung des mathematischen Objekts „gezeichneter Kreis“ haben. Die Aktivitäten (Konstruktion mit DGS oder Zirkel, Gärtnerkonstruktion, Abmalen...), durch welche diese Vorstellungen erworben wurden, bestimmen auch, ob die Konstruktion eine automatisierte Wiederholungshandlung war oder ob eine Übertragung auf andere Sachverhalte und damit eine Konzeptualisierung des mathematischen Begriffs erfolgte.

Es gibt vielfältige Möglichkeiten, mit Tabellenkalkulationen, dynamischer Geometriesoftware und Algebrasystemen zu experimentieren, Vermutungen aufzustellen, Simulationen zu entwickeln, dafür bedarf es aber schon entwickelter Repräsentationen höherer Ordnungen, in denen dann mithilfe von Algorithmen operiert werden kann (siehe auch Renn & Damerow 2007).

Ein mathematischer Begriff kann in einer Tätigkeit sowohl als vermittelndes Werkzeug und auch als Untersuchungsgegenstand auftreten. Die Wechsel dieser Rollen entsprechen Operationalisierungen und Konzeptualisierungen des Begriffs.

Stark spezialisierte Handwerkzeuge unterstützen eine Automatisierung und ein Binden des Werkzeuges an den Untersuchungsgegenstand. Beim Zeichnen eines Kreises mit dem Zirkel führt das Zeichnen ähnlicher Gebilde zu Skizzen mit der freien Hand oder bei Verwendung der Gärtnerkonstruktion zu anderen Konstruktionen mit vorgegebenen Seillängen.

Eine Variation der „Kreiskonstruktion“ mit dynamischer Geometriesoftware führt mit großer Wahrscheinlichkeit zur Nutzung eines anderen, durch eine Verbildlichung angebotenen Werkzeugs aus der Werkzeugleiste durch Anklicken und Ausführen der angegebenen Konstruktionsschritte. Die Aktivitäten „Anklicken“ und „Anklicken der nächsten vorgegebenen Werkzeuge“ unterscheiden sich beim Werkzeug „Kreis“ und anderen Kreiskonstruktionswerkzeugen (z.B. „Kreis aus drei Punkten“ oder „Ellipse“) nicht. Die Variationen der Handlungen mit DGS werden durch die im Werkzeug vorprogrammierten Variationsmöglichkeiten bestimmt (Weiss-Pidstrygach 2011). Es ist die Reflexion der Resultate der durch Konstruktion ent-

standenen ikonischen Repräsentationen und nicht der über Anklicken erfolgten Konstruktionen mit der dynamischen Geometriesoftware, welche den Kreis von dem ihn erzeugenden Werkzeug löst. Für diese Reflexion bedarf es jedoch bereits des Vorhandenseins mentaler Repräsentationen.

Natürlich bieten gerade die in dynamischer Geometriesoftware implementierten Möglichkeiten, wie dynamisch veränderliche Größen und Möglichkeiten der Änderung der Lage, den Lernenden Raum zum Experimentieren, Aufstellen von Hypothesen und Spielen. Diese Tätigkeiten oder Handlungen sind dabei aber durch die Programmierung vorgegeben, ihre Veränderung setzt Kenntnisse des Programms oder sogar von Programmiersprachen voraus. Letzteres hat wenig mit der Entwicklung der mathematischen Lernhandlungen zu tun, in welchen das Konzept „Kreis“ als Untersuchungsgegenstand oder als vermittelndes Werkzeug (Problemlösemethode) auftritt.

Wie auch schon bei der Entwicklung des Zahlbegriffs beschrieben, sind für einen kreativen Umgang und die mathematische Begriffsbildung fördernden Umgang mit vorprogrammierten Operationen empirische Erfahrungen und mentale Repräsentationen erster und höherer Ordnungen wesentlich.

Für die Internalisierung mathematischer Begriffe und die Entwicklung mentaler Repräsentationen sind neben innermathematischen hierarchischen Prinzipien und Gesetzmäßigkeiten auch kultur-historische, in den Werkzeugen kodierte, Entwicklungen und damit mögliche Handlungsrahmen von wesentlicher Bedeutung für die Entwicklung mathematischer Lernhandlungen. Indem im handelnden Erkenntnisprozess mathematische Formeln, Begriffe, Konzepte, aber auch mathematische Mess- und Zeicheninstrumente (oder als diese nutzbare Objekte) sowohl als vermittelnde Werkzeuge, als auch als Untersuchungsgegenstand und somit Teil der mathematischen Sprache auftreten, werden Methoden formalisiert und mentale Repräsentationen Problemlösemethoden. Dadurch wird Begriffsbildung als dialektischer Zusammenhang zwischen Externalisierung und Internalisierung verschiedener Handlungen beschreibbar und Entwicklung aus dialektischer Sicht fassbar.

Die isolierte Betrachtung von digitalen Werkzeugen birgt die Gefahr, die kognitive Entwicklung des Subjekts auf den technischen Fortschritt der vermittelnden Werkzeuge zu reduzieren und nicht die Entwicklung der durch sie vermittelten Tätigkeit zu betrachten. Die im Zuge der Digitalisierung zum Ziel erklärte Medienkompetenz

kann bei fehlenden mentalen Repräsentationen der mathematischen Konzepte nur eine Bedienkompetenz sein.

Literatur

- Bächle, T.C. (2014): *Mythos Algorithmus: die Fabrikation des computerisierbaren Menschen*. Wiesbaden: Springer-Verlag.
- Bigalke, H.G. & Hasemann, K. (1977): *Zur Didaktik der Mathematik in den Klassen 5 und 6. (1. Orientierungsstufe)*. Frankfurt a.M.: Diesterweg.
- Blankerts H. (1975): *Theorien und Modelle der Didaktik. (9. Auflage)*. München: Juventa.
- Breyer-Mayländer, T. (2018): *Das Streben nach Autonomie: Reflexionen zum digitalen Wandel*. Baden-Baden: Nomos.
- Damerow, P. & Schmidt, S. (2004). *Arithmetik im historischen Prozess: wie „natürlich“ sind die „natürlichen Zahlen“?* In: Müller, G.N.; Steinbring, H. & Wittmann, E.C. (Hrsg.) (2004): *Arithmetik als Prozess*. Seelze: Kallmeiersche Verlagsbuchhandlung, 131-183.
- Dormolen, J.van (1978): *Didaktik der Mathematik*. Braunschweig: Vieweg.
- Freiman, V. (2014): *Types of Technology in Mathematics Education*. In: Lerman, S. (Ed.): *Encyclopedia of Mathematics Education*. Dordrecht: Springer, 623-629.
- Galperin, P.J. (1966): *Die geistige Handlung als Grundlage für die Bildung von Gedanken und Vorstellungen*. In: Lompscher, J. (Hrsg.): *Probleme der Lerntheorie*. Berlin: Volk und Wissen, 12-33.
- Glasmachers, E. (2018): *Elemente zur Motivationssteigerung und individuellen Leistungsförderung beim Einsatz digitaler Aufgaben*. Beiträge zum Mathematikunterricht. Münster: WTM-Verlag, 607-610.
- Guin, D.; Ruthven, K. & Trouche, L. (Eds.) (2005): *The Didactical Challenge of Symbolic Calculators*. Boston, MA: Springer.
- Hübner E. (2019): *Entwicklungsorientierte Medienpädagogik im Zeitalter der verschwindenden Schrift*. In: Bleckmann, P.; Lankau, R. (Hrsg.): *Digitale Medien und Unterricht*. Weinheim Basel: Beltz Verlag, 38-52.
- Hohenwarter, M. (2006): *GeoGebra-didaktische Materialien und Anwendungen für den Mathematikunterricht*. Dissertation, Salzburg. URL: [https:// archive.geogebra.org/static/publications/ mhoven_diss.pdf](https://archive.geogebra.org/static/publications/mhohen_diss.pdf) [09.12.2018].
- Holzmann, K. (1993): *Lernen. Subjektwissenschaftliche Grundlegung*. Frankfurt a.M./ New York: Campus Verlag.
- Karliczek, A. (2018): *Technik alleine reicht nicht. Grußwort der Bundesministerin für Bildung und Forschung*. In: *Jahresbericht 2017/18 des Stiftungsverbandes Bildung & Begabung „Fördern neu Denken. Didaktische Konzepte für digitales Lernen“*, Bildung & Begabung. Bonn. URL: [https:// www.stifterverband.org/ download/file/6729](https://www.stifterverband.org/download/file/6729) [09.12.2018].
- Kaenders, R. & Schmidt, R. (2011): *Mit GeoGebra mehr Mathematik verstehen*. Wiesbaden: Vieweg+ Teubner.
- Kaenders, R. & Weiss, Y. (2017): *Mathematische Schneeschmelze*. *Mitteilungen der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 25, 2, 82-89.
- Laborde, C. & Sträßer, R. (2010): *Place and Use of New Technology in the Teaching of Mathematics: ICMI Activities in the Past 25 Years*. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 42, 121-133.

- Lagrange, J.-B.; Artigue, M.; Laborde, C. & Trouche, L. (2003): Technology and Mathematics Education: A Multidimensional Study of the Evolution of Research and Innovation. In: Bishop, A. J.; Clements, M.; Keitel, C.; Kilpatrick J. & Leung F.K. (Eds.): Second International Handbook of Mathematics Education. Dordrecht, Boston: Kluwer Academic Publishers, 237-269.
- Lankau, R. (2017): Kein Mensch lernt digital. Über den Einsatz neuer Medien im Unterricht. Weinheim: Beltz.
- Lankau, R. (2019): Vom Unterrichten zum Bildungscontrolling. In: Bleckmann, P.; Lankau, R. (Hrsg.): Digitale Medien und Unterricht. Weinheim Basel: Beltz Verlag, 54-69.
- Lembke, G. & Leipner, I. (2015): Die Lüge der digitalen Bildung: warum unsere Kinder das Lernen verlernen. München: Redline Wirtschaft.
- Leontjew, A.N. & Galperin, P.J. (1966): Die Theorie des Kenntniserwerbs und der programmierte Unterricht. In: Lompscher, J. (Hrsg.): Probleme der Lerntheorie. Berlin: Volk und Wissen, 34-50.
- Modrow, E. (2003): Pragmatischer Konstruktivismus und fundamentale Ideen als Leitlinien der Curriculumentwicklung am Beispiel der theoretischen und technischen Informatik. Dissertation. Halle: Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg.
- Pietraß, M. (2017). Was ist das Neue an „digitaler Bildung“? Zum hochschuldidaktischen Potenzial der elektronischen Medien. In: Erziehungswissenschaft, 28, 55, 19-27.
- Pressey, S. (1965): Ein einfaches Gerät, das Tests darbietet sie auswertet und zugleich lehrt. In: Corell, W. (Hrsg.): Programmirtes Lernen und Lehrmaschinen. Braunschweig: Westermann, 25-32.
- Renn, J. & Damerow, P. (2007): Mentale Modelle als kognitive Instrumente der Transformation von technischem Wissen. In: Übersetzung und Transformation. Berlin: de Gruyter, 311-331.
- Rückriem, G. (2010): Mittel, Vermittlung, Medium. Bemerkungen zu einer wesentlichen Differenz. Vortrag im Graduiertenkolloquium an der Universität Potsdam, am 30. 10. 2010. URL: <https://georgruECKriem.wordpress.com/papiere-und-vortrage/mittel-vermittlung-medium/> [12.09.2018].
- Richter-Gebert, J. & Kortenkamp, U.H. (2002): Dynamische Geometrie: Grundlagen und Möglichkeiten. In: Proceedings of Nürnberger didactic Mathematics colloquium. URL: http://www.cinderella.de/papers/DG_GM.pdf [20.12.2018].
- Schreiber, A. (1983): Bemerkungen zur Rolle universeller Ideen im mathematischen Denken. *Mathematica didactica*, 6, 65-76.
- Schröder H. & Uchtmann, H. (1975): Einführung in die Mathematik. 6. Schuljahr. Frankfurt: Verlag Moritz Diesterweg.
- Schwarze, H. (1980): Elementarmathematik aus didaktischer Sicht. Bd.1 Arithmetik und Algebra. Bochum: Verlag Ferdinand Kamp GmbH & Co, KG.
- Schweiger, F. (1992): Fundamentale Ideen. Eine geistesgeschichtliche Studie zur Mathematikdidaktik. In: *Journal für Mathematik-Didaktik*, 13, 2-3, 199-214.
- Skinner, B. (1966a): Lehrmaschinen. In: Corell, W. (Hrsg.): Programmirtes Lernen und Lehrmaschinen. Braunschweig: Westermann, 37-66.
- Skinner, B. (1966b). Die Wissenschaft vom Lernen und die Kunst des Lehrens. In: Corell, W. (Hrsg.): Programmirtes Lernen und Lehrmaschinen. Braunschweig: Westermann, 66-84.
- Skinner, B. (1966c). Fünfzig Jahre Behaviorismus. In: Corell, W. (Hrsg.): Programmirtes Lernen und Lehrmaschinen. Braunschweig: Westermann, 85-111.

- Tietze, U.P.; Klika, M. & Wolpers, H. (1982): Positionen in der didaktischen Diskussion, historische Entwicklungslinien. In: Dies. (Hrsg.): Didaktik des Mathematikunterrichts in der Sekundarstufe II. Braunschweig: Vieweg+ Teubner Verlag, 87-94.
- Trouche, L. (2005): Calculators in Mathematics Education: A Rapid Evolution of Tools, with Differential Effects. In: Guin, D.; Ruthven, K. & Trouche, L. (Eds.): The Didactical Challenge of Symbolic Calculators. Boston, MA: Springer, 9-39.
- Weigand, H.-G. (2006) Der Einsatz eines Taschencomputers in der 10. Jahrgangsstufe Evaluation eines einjährigen Schulversuchs. In: Journal für Mathematik-Didaktik, 27, 2, 89-112.
- Weigand, H.-G. (2015): Begriffsbildung. In: Bruder, R.; Hefendehl-Hebeker, L.; Schmidt-Thieme, B. & Weigand, H.-G. (Hrsg.): Handbuch der Mathematikdidaktik. Berlin, Heidelberg: Springer Spektrum, 255-278.
- Weigand, H.-G. & Weth, T. (2002): Computer im Mathematikunterricht. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.
- Weiss, Y. & Kaenders, R. (2018): Die Kompetenzfalle. In: Spektrum der Wissenschaft, 8, 80-85.
- Weiss-Pidstrygach, Y. (2011): Umfängliches und Diametrales. In: Kaenders, R. & Schmidt, R. (Hrsg): Mit GeoGebra mehr Mathematik verstehen. Wiesbaden: Vieweg+ Teubner, 21-41.
- Zech, F. (1983): Grundkurs Mathematikdidaktik. Beltz.
- Zech, F. (1995): Mathematik erklären und verstehen: eine Methodik des Mathematikunterrichts mit besonderer Berücksichtigung von lernschwachen Schülern und Alltagsnähe. Berlin: Cornelsen.
- Ziegenbalg, J.; Ziegenbalg, O. & Ziegenbalg, B. (2016): Algorithmen von Hammurapi bis Gödel: Mit Beispielen aus den Computeralgebrasystemen Mathematica und Maxima. Berlin: Springer-Verlag.

Sachregister

Abbildungsgeometrie
 Abituraufgaben
 Abstraktion
 Aktionsforschung
 Algebraisierung
 Algorithmus
 Arithmetik
 behavioristische Modelle
 Bildungsstandards
 Bildungsziele
 Computeralgebrasysteme
 Computer-Methaphorik
 Design Research
 Digitale Bildung
 Digitale Werkzeuge
 digitalisierte Klassenzimmer
 Digitalpakt
 Digitalisierung
 E-Learning
 experimentelle Geometrie
 Fachsystematik
 Flussdiagramme
 fundamentale mathematische Idee
 Geometrie
 grafikfähiger Taschenrechner
 Handlung
 Handlungsorientierung
 Heilsversprechen
 instrumentelle Konditionierung
 informationstheoretisch-
 kybernetisch
 Kalkül
 Kommunikation
 Kompetenzorientierung
 Konzeptualisierung
 kritische Psychologie
 Kultur
 Lehrmaschinen
 Lernbegleiter
 Lernmodell
 maschinenlesbar
 Massenunterricht
 Mathematikdidaktik
 Mathematikunterricht
 Medium
 mengentheoretisch
 Messbarkeit
 Neue Mathematik
 Ökonomisierung
 Operationalisierung
 programmierbar
 Programmierung
 programmierter Unterricht
 Repräsentationen erster Ordnung
 sozialkulturell
 Stimulus-Response-Modell
 tätigkeitstheoretisch
 Tätigkeit
 Universelles Werkzeug
 Unterrichtsmodell
 Unterrichtsreform
 Verhaltensmodifikation
 Visualisierungen
 wissenschaftlichen Taschenrechner

Personenregister

Artigue, M.
Bächle, T.C.
Bigalke, H.G.
Bishop, A.J.
Blankerts H.
Bleckmann, P.
Breyer-Mayländer, T.
Bruder, R.
Clements, M.
Corell, W.
Damerow, P.
Dormolen, J. van
Freiman, V.
Galperin P.J.
Guin, D.
Hasemann, K.
Hefendehl-Hebeker, L.
Hohenwarter, M.
Holzkamp, K.
Karliczek, A.
Kaenders, R.
Keitel, C.
Kilpatrick, J.
Klika, M.
Kortenkamp, U.
Laborde, C.
Lankau, R.
Laborde, C.
Lagrange, J.-B.
Leipner, I.
Lembke, G.
Leontjew, A.N.
Leung F.K.
Modrow, E.
Müller, G.N.
Pietraß, M.
Pressey, S.
Renn, J.
Richter-Gebert, J.
Ruthven, K.
Rückriem, G.
Schmidt, R.
Schmidt, S.
Schmidt-Thieme, B.
Schreiber, A.
Schröder, H.
Schwarze, H.
Schweiger, F.
Skinner, B.
Steinbring, H.
Sträßer, R.
Tietze, U.P.
Trouche, L.
Uchtmann, H.
Weigand, H.-G.
Weiss, Y.
Weiss-Pidstrygach, Y.
Weth, T.
Wittmann, E.C.
Wolpers, H.
Zech, F.
Ziegenbalg, J.
Ziegenbalg, O.
Ziegenbalg, B.