Tätigkeitstheoretische Aspekte des Mathematikunterrichts in internationalen Klassen am Beispiel von Figurierten Zahlen

Marc Sauerwein

Ausgehend von dem konkreten, praktischen Problem des Mathematikunterrichts in einer Internationalen Vorbereitungsklasse wurde eine Unterrichtseinheit zur Einführung in die Algebra entwickelt: Algebra ist hier nicht nur als das bloße Umformen von Gleichungen zu verstehen, sondern ganzheitlicher als Sprache der Algebra, die es uns erst ermöglicht, allgemeine Zusammenhänge in der Form auszudrücken, wie wir sie heute kennen. Der Unterricht zeichnet sich durch einen handlungs- und gegenstandsorientierten Zugang aus, der sich an der Entwicklung der mathematischen Sprachen aus sprachphilosophisch-genetischer Sicht nach Kvasz orientiert und Figurierte Zahlen in den Mittelpunkt des Unterrichts stellt. Im Folgenden wird dieses Entwicklungsforschungsprojekt grob skizziert und in einer ersten Annäherung aus Sicht der Tätigkeitstheorie betrachtet mit besonderem Fokus auf den besonderen Kontext einer Internationalen Klasse.

1. Ausgangspunkt

1.1 Die Internationale Vorbereitungsklasse

Seit Sommer 2015 sind deutschlandweit an vielen Schulen verschiedene Klassenverbände für Kinder und Jugendliche mit Migrationshintergrund entstanden, die wir – trotz verschiedener Nomenklaturen in den einzelnen Bundesländern – zusammenfassend als „Internationale Vorbereitungsklasse“ (IVK) bezeichnen werden. Die Analyse der Erfahrungen aus einer konkreten IVK legt den Schluss nahe, dass es neben dem sprachlichen Aspekt weitere Unterschiede zu einer Regelklasse gibt, die zu einer Heterogenität beitragen. Wie in jeder Klasse gibt es auch in einer Internationalen Klasse unterschiedlich begabte und unterschiedlich leistungsfähige Schüler/innen. Diese natürliche Heterogenität wird in einer Internationalen Klasse aber zum einen durch ein deutlich größeres Altersspektrum[1] und zum anderen durch verschiedene Herkunftsländer der Kinder verstärkt. Die starke Heterogenität akzentuiert sich dann in unterschiedlichen Bereichen, die wir *Komponenten* nennen, von denen ausgewählte[2] kurz vorgestellt werden sollen, da sie den Unterricht in der IVK grundlegend prägen (mehr dazu in Sauerwein 2020):

- *Sprachliche Komponente*: Für die Schüler/innen gibt es keine gemeinsame Alltagssprache; das Lernen der deutschen Sprache ist daher nicht nur auf den Klassenraum beschränkt, sondern bestimmt den kompletten Alltag. Die Sprachniveaus, bezogen auf den gemeinsamen europäischen Referenzrahmen, liegen zwischen A1 und B2; einige Schüler/innen erreichen nicht einmal A1. Eine informelle Kommunikation wird aufgrund der fehlenden gemeinsamen Sprachbasis erschwert.
- *Emotionale Komponente:* Die sprachlichen Probleme sind auch im Alltag präsent. Dies kann zu einer überhandnehmenden Frustration führen, da die Schüler/innen sich in den meisten alltäglichen, sprachlichen Anforderungssituationen nicht als adäquat gerüstet sehen. Schon vor dem Projekt konnten wir erkennen, dass viele Schüler/innen Mathematik mutiger angingen als andere Fächer, in denen sie teilweise passiv blieben oder Unterrichtsstunden nicht wahrnahmen. Eine mögliche Ursache könnte die Struktur der Mathematik mit ihrer besonderen Zugänglichkeit über verschiedene Repräsentationen sein.
- *Kulturelle Komponente*: Der regelmäßige Schulbesuch ist nicht Teil jeder Kultur, gleichwohl besitzen alle Schüler/innen aus der beobachteten Lerngruppe eine positive Einstellung gegenüber der Schule und sind dankbar für jede Hilfe. Dennoch überforderte einzelne Schüler/innen der strukturierte Alltag einer Schulwoche und die damit verbundenen Verpflichtungen. Aus ihren Heimatländern kannten sie einen Schulbesuch nicht, sondern trugen ihren Teil zur Versorgung der Familie bei.[3] Häufig wiederkehrende Wechsel zwischen Dankbarkeit und Frustration waren zu beobachten.

---

[1] Für die konkrete Klasse liegt diese Spannweite bei acht Jahren.

[2] Darüber hinaus konnten eine mediale, eine psychologische und eine persönliche Komponente herausgearbeitet werden (Sauerwein 2020).

[3] Durch kriegerische Auseinandersetzungen, einer langen Flucht (z.T. mehrere Jahre) o.Ä. kann es zu langen Phasen ohne schulische Betreuung oder zu Lernbiographien mit häufig wechselnden

- *Institutionelle Komponente*: Die Unterrichtskultur ist in Deutschland eine andere als in vielen Heimatländern der Schüler/innen. Der Unterricht ist weniger autoritär, fordert längere selbstständige Arbeitsphasen und beinhaltet weniger Auswendiglernen. Die Ansprüche des Unterrichts sind verschoben, da dieser stetig die Eigeninitiative der Schüler/innen fordert.
- *Instrumentelle Komponente*: Obgleich die Schüler/innen viel Erfahrung im Umgang mit Smartphones oder Tablets haben, kennen die meisten keine Desktop-Computer. So hatten einige Schüler/innen damit grundlegende Probleme, als sie den Computer anschalten, eine Datei speichern oder die Maus bedienen sollten. Ebenfalls unbekannt für die Schüler/innen waren Geodreiecke und Zirkel, die für die Begriffsentwicklung von Winkeln und Abständen innerhalb der Geometrie von immenser Bedeutung sind.
- *Mathematische Komponente*: Die mathematischen Vorerfahrungen sind sehr unterschiedlich: von einem rudimentären Zahlverständnis im Zahlenraum von 1-10 bis hin zu zwölf Jahren an mathematischem Unterricht an Schulen, die bezogen auf die entsprechenden Lerninhalte mit westeuropäischen Schulen vergleichbar sind.

1.2 Konsequenzen der Komponenten der Heterogenität

Das wesentliche Ziel der IVK ist es, die Schüler/innen, so schnell wie möglich, in der Regel nach zwei Jahren, an der für sie individuell passenden „Stelle" des Bildungssystems einzugliedern. Zunächst ist daraus und aus den Komponenten der Heterogenität abzuleiten, dass die einzelnen Ziele des Schulbesuches der Schüler/innen variieren müssen; das Spektrum der angestrebten Abschlüsse umfasst die Fachoberschulreife (mit der Berechtigung zum anschließenden Besuch der Oberstufe) bis zu einem Hauptschulabschluss nach Klasse 9. Für einige wenige Schüler/innen ist der Schulbesuch hingegen nur dafür gedacht, erstmalig einen geregelten Alltag in einem geschützten Raum zu erfahren. Abhängig vom Herkunftsland kann ein Hauptschulabschluss nach Klasse 9 mit anschließender Berufsausbildung auch für Schüler/innen mit potenziell höherer Bildungsapperzeption eine Alternative darstellen, da eine Ausbildung (inkl. Ausbildungsduldung) im Gegensatz zum Schulbesuch den Verbleib in Deutschland sichern kann.

Schulen in ebenso häufig wechselnden Ländern gekommen sein. Dies ist aber sehr individuell und wird daher der persönlichen Komponente zugeordnet.

Stark vereinfachend lassen sich die Konsequenzen mit einer starken Diversität im Maß und in der Art der Vorbildung einschließlich einer Bildungsproblematik[4] sowie einer sprachlichen Facette zusammenfassen. Zu der Bildungsproblematik zählen wir u.a. ein der bisherigen Bildungslaufbahn geschuldetes eingeschränktes Bild von Mathematik: Mathematik erscheint als ein fertiges Konstrukt und das Erlernen von Mathematik besteht aus dieser Sicht hauptsächlich daraus, die Lösungen der Lehrkraft formal richtig nachzuahmen – ohne jegliche Diskussion oder tieferes Verständnis. Natürlich gibt es dann immer nur eine richtige Lösung und deren Beurteilung auf Richtigkeit obliegt einzig der Lehrkraft. Gründe für diese Sicht könnten beispielweise Unterrichtspraktiken sein, die sich durch einen stark konditionierenden bzw. instruktionalistischen Charakter auszeichnen. Diese interessieren sich wenig für die Begriffsentwicklungen und das Herausfordern eigener Fragen durch die Schüler/innen, bei deren Beantwortung der Mathematikunterricht helfen könnte: eine extreme Variante der *Regeldetri des Mathematikunterrichts* (Jahnke 2012). Eine derartige mathematische Unterrichtskultur ist für viele Schüler/innen der IVK die einzig erlebte und mündet schließlich in einer institutionell und kulturell verschuldeten Passivität: Die Verantwortung für die Bedeutung des Lernprozesses wird den Schüler/innen nicht zugetraut, ihnen genommen und stattdessen an die Lehrkraft übertragen.

Insbesondere ist aus den vorangegangenen Auszügen der Analyse offensichtlich, dass keine allgemeinen Standards verwendet werden können; wir folgen daher Jahnke (2016):

> *„Das Ernstnehmen der Schülerinnen und Schüler [...] mahnt eine Didaktik an, die sie in ihren Vorhaben stets mitdenkt, nicht nur als abstrakte Repräsentation einer Jahrgangsstufe, sondern als Individuen, als junge Menschen, die wir unterrichten, an deren Enkulturation wir mitwirken, für die wir verantwortungsbewusst keine Mühen scheuen“ (Jahnke, 2016, 56).*

[4] Die Bildungsproblematik sieht der Autor eher als erste Konsequenz der vorgestellten Komponenten der Heterogenität.

1.3 Konkretes Problem[5]

Für den Teil der Schüler/innen der IVK, die einen Schulabschluss anstreben, hat Mathematik einen hohen systemischen Stellenwert, da das Fach Mathematik durch seinen Hauptfachstatus in jedem deutschen Schulabschluss abgeprüft wird. Dies übt wiederum systemischen Druck auf den Mathematikunterricht und seine Akteure aus. In jedem der Schulabschlüsse wiederum wird der Umgang mit Variablen, Termen und Gleichungen, also elementare Algebra, verlangt.

Dieses die Schüler/innen umspannende System dominiert folglich auch ihre Tätigkeit: Der Schulbesuch, der Abschluss und dementsprechend der Mathematikunterricht besitzen einen ungleich existentielleren Stellenwert für die Schüler/innen der IVK, als dies bei Regelschüler/innen der Fall ist.

Mit der o.g. Bildungsproblematik und einem – der eigenen Sozialisation geschuldeten – eingeschränkten Mathematikbild sowie einer engen Vorstellung von Unterrichtskultur entsteht eine Erwartungshaltung an den Mathematikunterricht, die sich nicht konsequent auf den mathematischen Gegenstand bezieht. Hinzu kommt, dass der Mathematikunterricht an deutschen Schulen eher konstruktivistisch geprägt ist: So ist es üblich, dass der Unterricht den Schüler/innen die Gelegenheit gibt, sich dem vom Lehrenden präsentierten Inhalt (Lehrgegenständen) aus dem Kontext von Vorerfahrungen zu nähern und jeweils eigene Lerngegenstände zu konstruieren. Wenn die Vorerfahrungen und die dadurch beeinflussten Lernbedürfnisse sich nicht auf einen entsprechenden Mathematikunterricht stützen können, besteht die Gefahr, dass mathematikferne Motive und letztlich Lerngegenstände entstehen.

> *„Vor seiner ersten Befriedigung ‚kennt' das Bedürfnis seinen Gegenstand nicht, er muss erst noch entdeckt werden. Erst durch diese Entdeckung wird das Bedürfnis gegenständlich und der wahrgenommene (vorgestellte, gedachte) Gegenstand erhält seine anregende und tätigkeitslenkende Funktion, das heißt: er wird zum Motiv" (Leont'ev 2012, 165).*

[5] In der betreffenden IVK sind immer zwei Lehrkräfte anwesend, sodass die Klasse in kleinere Gruppen eingeteilt werden kann; dies ist im Kontext Internationaler Klassen eine Ausnahme. Eine Lerneinheit zur Einführung in die Algebra ist nur für den Teil der Klasse relevant, der einen Schulabschluss machen soll und noch keine Kenntnisse in elementarer Algebra besitzt.

Für die Schüler/innen der IVK sind einerseits die bisher gewonnenen Erfahrungen heterogener und andersartig, andererseits war der Prozess einer aus der eigenen Erfahrung heraus entwickelten Motivbildung und Konstruktion des darauf bezogenen mathematischen Lerngegenstands nie bewusst erlebter Teil des erfahrenen Mathematikunterrichts. Das Motiv, Mathematik treiben zu wollen, ist demnach (noch) nicht in ihrer Reichweite. An dieser Stelle sollte mit einer Revision von Fehlkonzepten des Faches angesetzt werden.

Der Mathematikunterricht sieht sich in Deutschland den drei Winterschen Grunderfahrungen (Winter 1995), aber auch dem Bildungsideal verpflichtet und sollte Schüler/innen daher Bildungsmöglichkeiten bieten: Dazu gehören die Wertschätzung der und schließlich das Vertrauen auf die eigenen Gedanken, um eine intellektuelle Selbständigkeit zu entwickeln und zu fördern. Gerade diese emanzipatorische Haltung ist herausfordernd und widerständig – in gewisser Weise aber auch notwendig – für die Schüler/innen der IVK.

2. Problemansatz

In einer Schulbuchanalyse der gängigen Unterrichtswerke zeigen Prediger & Krägeloh (2015), dass deutsche Schulbücher das Konzept der Variablen hauptsächlich über sprachliche Mittel mit Bezug auf die Alltagssprache einführen. Mit den vorangestellten Ausführungen zur sprachlichen Komponente der Heterogenität wird deutlich, dass demnach solche Lehrwerke für den Regelunterricht keine geeigneten Unterrichtsmaterialien für den Algebra-Unterricht in der IVK darstellen können. Gerade der Übergang von der Arithmetik zur elementaren Algebra ist ein wichtiger Schritt, der keineswegs zu schnell und auf bedeutungslosen Regeln (im Sinne von Buchstabenrechnen) basierend, vollzogen werden sollte (vgl. dazu u.a. Freudenthal 1977, 276). Wenn die Variable für die Lernenden keine personale Bedeutung bzw. Sinn besitzt, resultieren Probleme, auf welche Malle in *Didaktische Probleme der elementaren Algebra* (1993) hinweist: Die Schüler/innen der IVK könnten dann ein Bild von Mathematik mit dem Fokus auf symbolische-formale Mathematik entwickeln, wobei die Verwendung einer Variablen von ihnen nicht mit Sinn gefüllt und damit die Herausbildung eines adäquaten Motivs behindert werden kann. Dabei würden die Schüler/innen nur mathematische Operationen simulieren, denn nur unter der Bedingung der Entstehung von mathematischen Motiven im eigentlichen Sinne ist eine tatsächliche Aneignung mathematischer

Operationen auf dem Niveau des theoretischen Denkens möglich (vgl. Leont'ev a.a.O., 244).

Das Anliegen des Projektes bestand darin, einen Ansatz zur Einführung in die elementare Algebra zu entwickeln, der der besonderen Situation in der IVK gerecht wird. Da hierfür kein geeignetes Material verfügbar war[6], haben wir ein solches in Form der Figurierten Zahlen entwickelt. Diese sind zwar voraussetzungsarm hinsichtlich der Sprache, aber dennoch bedeutungstragend hinsichtlich einer angemessenen mathematischen Sprach- und Begriffsentwicklung. Figurierte Zahlen sind also ein bewusst gewähltes didaktisches Konstrukt, inspiriert von der Analyse von Kvasz (siehe 2.1).

2.1 Didaktische Adaption einer epistemologischen Sicht

In einer sprachphilosophisch-genetischen Analyse kann Kvasz (2008, 2012) den Verlauf der Entwicklung der Mathematik nachzeichnen, indem er diesen mit der Entwicklung der mathematischen Sprachen in Beziehung setzt. Er arbeitet schließlich einzelne Schichten dieser Sprache heraus, die entweder von ikonischer oder symbolischer Natur sind. Inspiriert von Freges Werk *Function und Begriff* (1891), kann Kvasz neben der von Frege vorgestellten symbolischen Entwicklungslinie eine ähnliche ikonische für die Geometrie herausarbeiten. Diese beiden Stränge an Sprachen konnte er darüber hinaus in eine zwischen den Darstellungsformen abwechselnde Entwicklung einbetten. Den Übergang zwischen den verschiedenen Sprachen ist ein Veränderungsmuster, welches er *re-coding* (Re-kodierung) nennt:

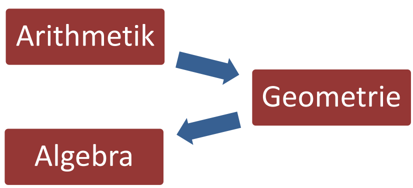


Abb. 1: Entwicklung der Sprachen der Arithmetik, Geometrie und Algebra

---

[6] Seit Mitte 2017 gibt es zwei Arbeitsheftserien (*INTRO Mathematik S1* sowie *prima ankommen im Fachunterricht – Mathematik*) für den Einsatz in Internationalen Klassen. Dieses Material ist weder für die Sprach- noch die Begriffsentwicklung im Bereich der Algebra geeignet, da vor allen Dingen mechanistisches Abarbeiten verlangt wird (vgl. Sauerwein 2020). Dieses Material war zu Beginn des Projektes im Sommer 2016 noch nicht erschienen.

Die erste Re-kodierung ist stark mit den Pythagoreern verbunden, die Figurierte Zahlen mithilfe von ψῆφοι (Rechensteinen) kreierten. Eine erste Quelle zu Figurierten Zahlen ist die Einführung in die Arithmetik von Nikomachos von Gerasa (D'Ooge 1926), in der er neben Quadratzahlen und Heteromeken (Rechteckszahlen) auch Polygonal- und Polyederzahlen einführte. Die hervorgehobenen Gnomome erleichtern die Fortsetzbarkeit.

Abb. 2: Quadratzahlen und Heteromeken

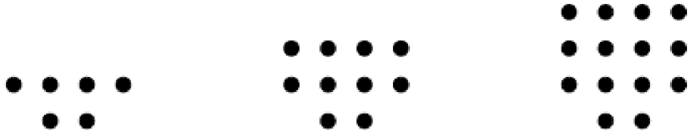
Arithmetisch nur beobachtbare, aber nicht erklärbare Eigenschaften, wie die Lehre vom Geraden und Ungeraden, konnten systematisiert werden. Für eine umfassende Übersicht zu Figurierten Zahlen, die deren tiefe mathematische Reichweite entfaltet, verweisen wir auf Deza & Deza (2012).

Die zweite Re-kodierung ist die Einführung einer Symbolnotation für das Konzept einer Variablen. Der zuvor nur implizit verwendete Variablenbegriff in Form von Strecken unbekannter Länge wurde expliziert und damit auch vom Anschauungsraum gelöst: Terme oder Gleichungen (in dieser Variablen) können selbst zum Gegenstand weiterer Betrachtungen werden.

Aufbauend auf der Analyse von Kvasz und der Sicht auf Mathematik als System geschichteter Sprachen mit jeweils eigenen kognitiven Aspekten kann der Übergang von der Arithmetik zur Algebra in der Schule auch als eine Erweiterung dieser kognitiven Potentiale interpretiert werden: Das Erkennen neuer Bedeutungen wird dann zentral, während das Nutzen von symbolischer Notation in dieser Phase einen untergeordneten Aspekt darstellt. Die Einführung einer neuen symbolischen Schreibweise ist nur der erste Schritt zu einer neuen symbolischen Sprache (Kvasz 2012). Er beinhaltet ebenfalls neue Operationen mit dem eingeführten Symbol. Daher kann gefolgert werden, dass typische mathematische Aktivitäten, wie Verallgemeinern, Vermutungen aufstellen, Beweisen u.Ä., als Teil der Sprache der Algebra zu sehen sind: Algebra ist also mehr als bloßes „Buchstabenrechnen (Arithmetik mit Buchstaben)".

2.2. Festlegung des Terminus Figurierte Zahlen

Der zentrale Gegenstand der Lernumgebung sind *Figurierte Zahlen*[7]. Unter einer solchen wollen wir eine Folge von Punktmustern, wie z.B.



,

einschließlich der zugehörigen Zahlenfolge $(6, 10, 14\ \ldots)$, die jeweils die Anzahl der im Muster enthaltenen Punkte angibt, verstehen. Diese beiden Folgen bedingen einander: während die Zahlenfolge eindeutig aus einer impliziten (nicht eindeutigen) Zählstrategie aus der Punktmusterfolge entsteht, ist andererseits die Punktmusterfolge eine (mögliche) Figurierung der Zahlenfolge. Die Punktmuster können auch in weniger typischen Formen angeordnet sein. Die Bezeichnungen der Repräsentationsformen von Bruner übernehmend und angelehnt an die Analyse von Kvasz unterscheiden wir zwischen der ikonischen und symbolischen Darstellung von Wissen:

> *Any domain of knowledge [...] can be represented in three ways: […] by a set of summary images or graphics that stand for a concept without defining it fully (iconic representation); by a set of symbolic or logical propositions drawn from a symbolic system that is governed by rules or laws for forming and transforming propositions (symbolic representation) (Bruner 1966, 44f.).*

In dieser Hinsicht kombiniert unsere Definition von Figurierter Zahl beide Repräsentationen[8]. Das Bildungsgesetz als Teil der Figurierten Zahl stellt den Keim eines möglichen *Generalisierungszugangs* in die elementare Algebra dar (vgl. dazu u.a. Mason 1984, Hefendehl-Hebeker & Rezat 2015, Sauerwein 2020): So wie die natürlichen Zahlen als Indexfolge sukzessive weitergezählt werden können, wird die

---

[7] Diese Definition weicht von der üblichen Definition ab, in der eine natürliche Zahl figuriert heißt, „wenn sie durch die entsprechende Anzahl gleichartiger Objekte […] dargestellt ist, die zu einer Figur (Dreieck, Quadrat, Prisma, Pyramide o.Ä.) angeordnet sind“ (Schupp 2008, 2).

[8] Die Bezeichnungen *ikonisch* und *symbolisch* sind an dieser Stelle vor allem als pragmatische Unterscheidung zu sehen; in der Tat ist es so, dass die ikonische Repräsentation der Figurierten Zahl ein Diagramm im Sinne von Dörfler (2006) wird (vgl. dazu Sauerwein 2020).

Fortsetzbarkeit der Punktmuster suggeriert, obgleich die Regelmäßigkeit nicht offensichtlich oder gar eindeutig sein muss. Die Auswahl spezieller Figurierter Zahlen ermöglicht die Ausdrückbarkeit der impliziten Fortsetzbarkeit in algebraischen Termen, sodass wir drei Repräsentationsformen von Figurierten Zahlen erhalten (siehe Abbildung 3).

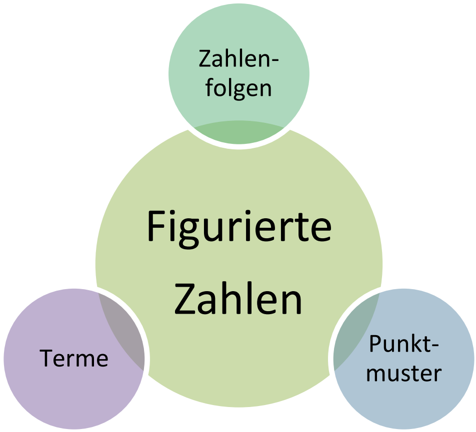


Abb. 3: Die drei kanonischen Repräsentationsformen von Figurierten Zahlen

Die in der Unterrichtseinheit verwendeten Figurierten Zahlen besitzen definitionsgemäß ikonische und symbolische Repräsentationsformen, die durch Einbindung der Folgeneigenschaft in die elementare Algebra ausstrahlen (siehe Abbildung 3). Die beiden Re-kodierungs-Schritte von Kvasz werden somit mit der Definition der Figurierten Zahl verwoben und können daher auch mehrfach durchlaufen werden. Der Gegenstand der Figurierten Zahlen, materiell gesehen, ist also Träger mathematisch kulturellen Wissens, das zu bedeutsamen mathematischen Handlungen und sprachlichen bzw. begrifflichen Entwicklungen hinsichtlich der Algebra führen kann (mehr dazu in Sauerwein 2020).

Die Struktur der Figurierten Zahlen bedingt, dass das Konzept der Variablen beim Umgang und Verstehen dieser Figurierten Zahlen aufgedeckt werden kann. Dies soll als zentrales Anliegen des Unterrichts aufgefasst werden, um sich schließlich innerhalb der IVK auf Basis der gewonnen Erfahrungen die Sinnhaftigkeit von Variablen bewusst werden zu lassen und sich schließlich auf eine angepasste symbolische Notation zu einigen. Beziehung, objektive Bedeutung und der entsprechende subjektive Sinn können nicht vermittelt werden. Er kann von den Schüler/innen nur auf der Basis der im Unterricht angeeigneten entsprechenden Kenntnisse und Fähigkeiten selbst konstruiert werden (vgl. Leont'ev a.a.O., 240).

2.3 Berücksichtigung der Komponenten der Heterogenität in der Konzeption der Figurierten Zahlen

Die Repräsentation der Figurierten Zahl durch Punktmuster nennen wir ikonisch, da sie im Unterricht durch gezeichnete Punkte an der Tafel, am Whiteboard, im Heft, etc. realisiert wurden. Die Entscheidung gegen eine enaktive Repräsentation durch konkretes Material, wie z.B. Plättchen oder Äpfel, entstand aus verschiedenen Gründen.

Wie die instrumentelle Komponente verdeutlicht, ist es für die Mehrzahl der Schüler/innen der IVK nicht üblich, die in Deutschland üblichen Gerätschaften bzw. Anschauungsmaterialien im Mathematikunterricht zu nutzen. Selbst die mit dem Blick aufs Wesentliche konzipierten schlichten Punktmuster wurden – vermutlich bedingt durch das eingeschränkte Bild von Mathematik und den systematischen Druck – vereinzelt von Schüler/innen als ein Spiel für Kinder abgelehnt. In Deutschland sind solche Repräsentationen anerkannter Teil der Grundschulmathematikdidaktik, da sie für den Erwerb eines tragfähigen Zahlbegriffs unabdingbar sind. Nun haben die Schüler/innen der IVK einerseits nie eine deutsche Grundschule besucht, und andererseits sind sie deutlich älter (14-22 Jahre). Aber das bedeutet auch, dass manche dieser Schüler/innen kein adäquates Motiv hatten: Sie wollten die Mathematikprüfung bestehen, aber nicht mathematisch denken lernen. Daher kann das Material auch diagnostisch verwendet werden, um sowohl Hinweise auf die Motive der Schüler/innen als auch auf das Niveau des Zahlbegriffes zu bekommen, da in einem bestimmten Schritt des Erwerbs des Zahlbegriffs auf einem abstrakteren Level eingehakt wird: Zahlen als Kardinalitäten von Mengen sowie die Mengeninvarianz. Unter Umständen ist dies also eine Wiederholung und vielleicht Erweiterung der grundlegenden arithmetischen Fähigkeiten.

Eine der sprachlichen Komponente der Heterogenität ähnliche, aber weniger ausgeprägte und weitreichende Problematik zeigt sich in mehrsprachigen Regelklassen und hat in letzter Zeit in der Mathematikdidaktik zu dem Terminus des sprachsensiblen Unterrichtes geführt. In dem aktuellen Diskurs wird meist zwischen einer defensiven und einer offensiven Strategie unterschieden (vgl. Meyer & Tiedemann

2017): Während die defensive Strategie vor allem auf Sprachvermeidung (ohne Entwicklung) abzielt, versucht die offensive Strategie, kommunikationsfördernde Situationen zu schaffen und sprachliche Entwicklung dann auch einzufordern. Insbesondere die offensive Strategie wird meist unter der Bezeichnung sprachsensibler Unterricht verortet. Teilweise ist dabei eine „demotivierende Bereitstellungsbeflissenheit“ (Winter 1983) vorzufinden, die – wie bei Wessel & Sprütten (2018) – auch sehr normativen Charakter bekommen kann.

Hier soll hingegen auf eine der Situation angemessene, individuelle Sprachentwicklung Wert gelegt werden. Wir folgen dazu Winter (1978) und seinem Terminus der *Werkstattsprache*:

> *„Solche Werkstattsprachen, die sich durch hohe Anschaulichkeit, Situationsgebundenheit und grammatikalische Gelockertheit auszeichnen, die häufig durch Gestik unterstützt werden und die außerhalb der Gesprächsrunde so kaum verständlich sein dürften, entstehen wohl unvermeidlich von selbst und ihre kommunikative Bedeutung muß sehr hoch eingeschätzt werden“ (Winter 1978, 13).*

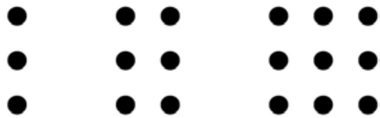
3. Figurierte Zahlen als handlungsorientierter Zugang zur elementaren Algebra

Die Nutzung bzw. Einführung von Anschauungsmaterial – hier sehr weit interpretiert – sollte zwei „psychologische Momente berücksichtigen, nämlich erstens, welche konkrete Rolle soll das Anschauungsmaterial bei der Aneignung spielen, und zweitens, in welcher Beziehung befindet sich der gegenständliche Inhalt dieses Anschauungsmaterials zu dem Gegenstand, der bewusstgemacht und angeeignet werden soll“ (Leont’ev a.a.O., 222). Weiter führt Leont’ev aus, dass „Stellung und Rolle des Anschauungsmaterials […] durch die Beziehung derjenigen Tätigkeit des Schülers [bestimmt werden], in der dieses Material als Gegenstand des unmittelbaren Handlungsziels auftritt, zu jener Tätigkeit, die zum Bewusstwerden dessen führt, was angeeignet werden soll (Leont’ev a.a.O., 224). So kann eine mögliche Art der Beziehung sein, dass „die erste Tätigkeit die zweite vorberei[tet], und dann ist nur erforderlich, die entsprechenden Etappen des pädagogischen Prozesses richtig und genau zu bestimmen“ (Leont’ev a.a.O., 224). Falls diese beiden Tätigkeiten jedoch unabhängig voneinander sind, wird das Anschauungsmaterial „nutzlos“ und kann sogar ablenken (vgl. Leont’ev a.a.O., 224).

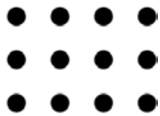
Wie diese Idee im Projekt aufgegriffen wurde, soll im Folgenden anhand der Unterrichtseinheit zu den Figurierten Zahlen beschrieben werden.

3.1 Einblicke in die Praxis[9]

Der Einstieg in die Reihe der Figurierten Zahlen verlief jeweils im Klassenplenum an der Tafel mit folgendem Punktmuster


,

das von einem Schüler/innen direkt mit



fortgesetzt wurde. Die Frage des Lehrers, warum dieses Bild richtig wäre, beantwortete ein zweiter Schüler durch Abzählen der vorherigen Punktmuster und der Feststellung, dass in dem neuen Punktmuster 12 Punkte sind. Durch weitere Fragen des Lehrers, wie es in den nächsten noch nicht gezeichneten Bildern weiterginge, ergänzten die Schüler/innen das Tafelbild zu einer Tabelle, in dem sie jeweils über das Bild den Bildindex, unter das Bild die Punktanzahl und zwischen den Bildern Pfeile mit +3 schrieben. Für weitere konkrete Bildindices konnten die Punktanzahlen der zugehörigen Bilder problemlos berechnet und notiert werden, ohne das entsprechende Bild zu zeichnen. Auf die Frage hin, wie denn das Bild aussähe, fingen einzelne Schüler/innen an, die Bilder ganz im Geiste von Werkstattsprache mit Gesten, Worten und Zeichnungen zu beschreiben. Die Wörter für Zeile und Spalte wurden im Gespräch erst gebraucht, nachdem ein Schüler diese am Punktmuster mit vertikalen und horizontalen Gesten beschrieben hatte. Es wurde sich schließlich auf die folgenden Beschreibungen geeinigt:

- Das nächste Bild hat drei waagerechte Reihen mit jeweils vier Punkten.
- Das nächste Bild besteht aus vier dieser Spalten.

[9] Das komplette Entwicklungsforschungsprojekt umfasst vier Zyklen. An dieser Stelle werden diese Durchgänge nicht einzeln beschrieben (mehr dazu in Sauerwein 2017, 2018, 2020).

- Es kommt immer das erste Bild dazu.
- Das rechte Bild besteht aus den beiden anderen Bildern.[10]

Es ist erkennbar, dass die bildlichen Darstellungen durch reines Zählen nicht vollständig beschrieben werden können; mit einfachen sprachlichen Mitteln können hingegen wichtige Zusammenhänge erfasst und ausgedrückt werden. Wenn die Punktmusterfolge schlicht mit der Dreier-Reihe $(3, 6, 9, \ldots)$ identifiziert werden würde, gingen Informationen bzw. Struktur verloren. Nun wurden noch einmal die Rechnungen, die in den entsprechenden Punktanzahlen resultierten, thematisiert und durch sprachliche Beschreibungen passend aufgeschrieben (ohne $= 12$ zu ergänzen)[11]:

- $3 \cdot 4$,
- $3 + 3 + 3 + 3$,
- $9 + 3$.

Diese Zahlterme sind jeweils unterschiedliche Sichtweisen auf die ikonische Darstellung, die als Verdeutlichung der Zählsystematik mehr Struktur besitzen als nur das Ergebnis. An dieser Stelle der Einführung wurde schließlich das Arbeitsblatt mit sechs weiteren Figurierten Zahlen und den gleichen Arbeitsaufträgen verteilt (siehe Abbildung 4). Der Übergang zur dritten Repräsentationsform einer Figurierten Zahl mithilfe einer Variablen und einem Term, um die Anzahl der Punkt zu beschreiben, wurde nicht vorschnell besprochen. Erst wenn die Schüler/innen die Idee artikulieren konnten, dass der Bildindex eine wichtige und variable Rolle spielt, dass die Rechnung (eigentlich) immer die gleiche ist, wurde der Übergang aufgegriffen. So entstanden zunächst aufbauend auf der ersten Sichtweise $(3 \cdot 4)$ Terme der Art:

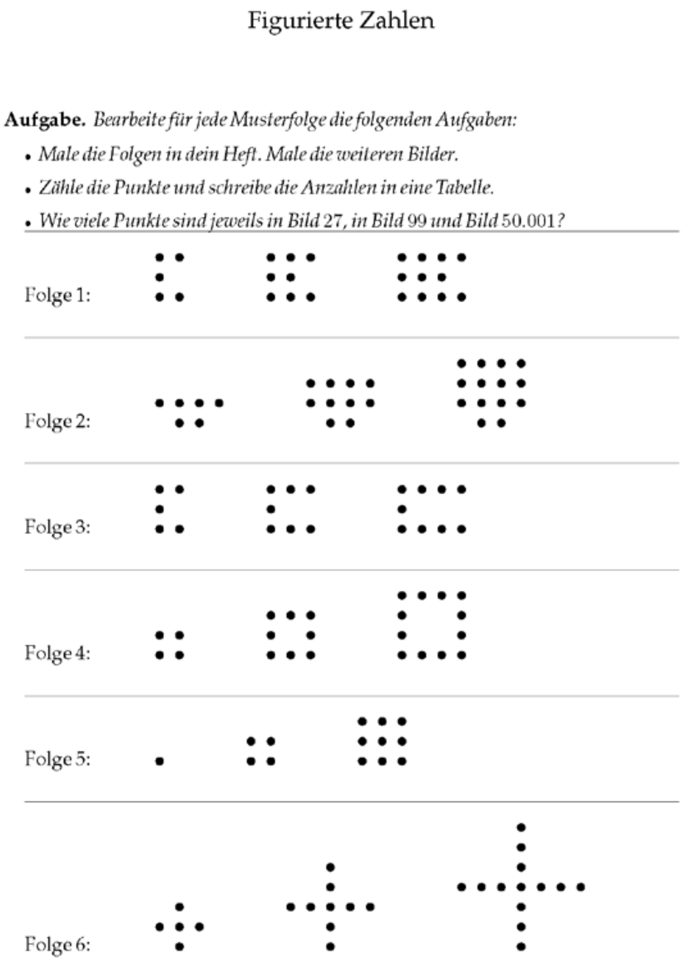
- $3 \cdot ?$ oder $3 \cdot \_\_$

[10] Diese Beschreibung entstand zwar nicht in der IVK, sondern im einzigen Durchgang in einer Regelklasse 7. Der Vollständigkeit halber wird diese hier auch aufgeführt, da sie prinzipiell auch in der IVK ausdrückbar wäre und die Eindeutigkeit des zugrundeliegenden Bildungsgesetzes in Frage stellt: Das fünfte Bild ist dann die Summer des dritten und vierten Bildes. Es ist schnell ersichtlich, dass dies ein anderes Bildungsgesetz ist und somit zu einer anderen Musterfolge und assoziierten Mächtigkeitsfolge führt.

[11] Der Übergang von der Arithmetik zur Algebra ist u.a. durch eine Bedeutungsverschiebung des Gleichheitszeichens gekennzeichnet: relational statt nur operational.

- $3 \cdot Bildnummer$ oder $3 \cdot BN$ oder $3 \cdot B$
- $\xrightarrow{*3}$

Schließlich konnte sich im Gespräch auf die Notation $3 \cdot n$ geeinigt werden.


Figurierte Zahlen

Aufgabe. *Bearbeite für jede Musterfolge die folgenden Aufgaben:*
- *Male die Folgen in dein Heft. Male die weiteren Bilder.*
- *Zähle die Punkte und schreibe die Anzahlen in eine Tabelle.*
- *Wie viele Punkte sind jeweils in Bild 27, in Bild 99 und Bild 50.001?*

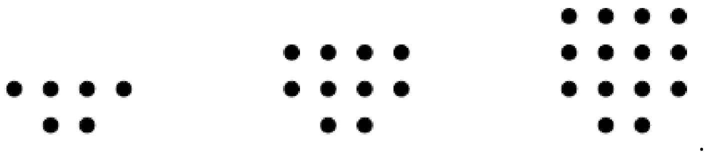
Abb. 4: Das Arbeitsblatt von Durchgang 4

Anhand des Einführungsbeispiels aus dem Unterricht wurde deutlich, dass die ikonische Repräsentation einer Figurierten Zahl zu verschiedenen Operationen wie

Zählen, Zusammenschieben und Strukturieren Anlass geben kann, die auf symbolischer Ebene keine oder weniger offensichtliche Entsprechungen besitzen. Unserer Definition von Figurierter Zahl folgend sind beide Repräsentationen konstituierend und können nicht isoliert voneinander betrachtet werden. Da das Verstehen einer Figurierten Zahl zentrales Anliegen des Unterrichts ist, umfasst dies insbesondere das Aufdecken der Zusammenhänge zwischen den unterschiedlichen Repräsentationsformen.

Das Eingangsbeispiel verdeutlichte ebenfalls, dass es beim Umgang mit Figurierten Zahlen – aufgrund ihrer Beschaffenheit – nicht notwendigerweise eine richtige strukturierende Sichtweise, z.B. einen Term für das n-te Bild, geben muss. Stattdessen sind vielfältige mathematische Handlungen mit Lösungsideen möglich, falls man sich auf das Spiel mit den Figurierten Zahlen einlässt. Gleichwohl ist jeder mögliche Lösungsvorschlag anhand der Figurierten Zahl veri- bzw. falsifizierbar. Für die Schüler/innen der IVK kann diese Haltung aufgrund der Sozialisation in den Unterrichtskulturen ihrer Heimat fremd sein.

Daher ist es besonders wichtig, das Interesse für das mathematische Wesen der Figurierten Zahl didaktisch zu wecken. Dazu eignet sich die vierte Folge des Arbeitsblattes, das *Füllglas*:[12]



Das *Füllglas* lässt auf ikonischer Ebene wohl nur eine Möglichkeit der Fortsetzung zu. Gleichwohl ist die Repräsentation reichhaltiger in dem Sinne, dass sie mehr Spielraum für Strukturierungen des Punktmusters lässt. Jede einzelne Strukturierung kann dabei als potentieller Anknüpfungspunkt für spätere Verallgemeinerungen und schließlich zur Beschreibung der Gesetzmäßigkeiten fungieren. Für das *Füllglas* sind u.a. folgende systematisierende Abzählweisen möglich und im Unterricht diskutiert worden:

[12] Im Folgenden verwende ich in diesem Text die suggestive Bezeichnung *Füllglas, wenn ich auf diese Figurierten Zahlen referenziere; diese Bezeichnung wurde* im Unterricht nicht genutzt und ist natürlich auch kein mathematischer Fachterminus.

- Ein Rechteck sowie 2 zusätzliche Punkte.
- Das Muster kann mit 2 Punkten zu einem (größeren) Rechteck ergänzt werden, diese beiden Punkte werden wieder abgezogen.
- Das Muster kann vertikal auseinandergeschnitten werden, da es aus zwei deckungsgleichen Teilen besteht, die jeweils (vertikal gezählt) der Summe zweier aufeinander folgenden Zahlen entsprechen.

Während die erste Beschreibung auch sehr zügig genannt und von der Klasse akzeptiert wurde, sind die beiden anderen spezifisch, wecken aber ggf. das mathematische Interesse: Das Hinzufügen von Punkten, die dann u.a. als „Geisterpunkt“, „falscher Punkt“ oder „Minuspunkt“ bezeichnet wurden, bzw. das Erkennen und Ausnutzen von Symmetrien sind ebenfalls Operationen, wie das vorherige Zählen, die natürlich im Umgang mit der ikonischen Repräsentation der Figurierten Zahlen ausgeführt werden und dann in die symbolische Repräsentation re-kodiert werden können.

> *„Etwas interessant zu gestalten bedeutet: erstens ein bestimmtes Motiv wirksam zu machen oder neu zu schaffen und zweitens auch die entsprechenden Ziele finden zu lassen. Mit anderen Worten, um das Interesse zu wecken, darf man also nicht das Ziel zeigen und dann versuchen, die Handlung in Richtung auf dieses Ziel motiviert zu rechtfertigen, sondern man muss umgekehrt das Motiv schaffen und* ***dann*** *die Möglichkeit aufdecken, das Ziel (gewöhnlich das ganze System der Zwischen- und ‚Neben‘-Ziele) in einem gegenständlichen Inhalt zu ermitteln. Folglich ist die Tätigkeit, die das Interesse weckt, jene Tätigkeit, in der an die Stelle der sie direkt realisierenden Handlungen ein nur mehr oder weniger deutlich umrissener Handlungsbereich steht“ (Leont’ev, a.a.O., S. 249).*

Wenn nun n für den Bildindex steht, können die drei genannten Sichtweisen des Füllglases den folgenden drei Termen oder in Werkstattsprache „Rezepten“ entsprechen:

- $4 \cdot n + 2$
- $4 \cdot (n + 1) - 4$
- $2 \cdot (n + (n + 1))$

4. Elementare Algebra als Konzeptualisierung des Umgangs mit Figurierten Zahlen

Figurierte Zahlen wurden zentraler Untersuchungsgegenstand dadurch, dass sie zunächst ikonisch fortgesetzt, arithmetisch gezählt und fortgesetzt sowie schließlich mit verschiedenen „Rezepten" beschrieben wurden.[13] „Rezept" oder später auch „Termrezept" ist eine der von der Klasse gewählten Bezeichnungen für einen Term. Jedes dieser „Rezepte" ist dabei Resultat einer subjektiven Sichtweise auf die ikonische Repräsentation der Figurierten Zahl.

Das eigentliche Ziel war die Ableitung erster algebraischer Identitäten wie $4 \cdot n+2= 4 \cdot (n+1) - 2$, deren Gültigkeit evident ist, da die entstandenen „Rezepte" die gleiche Figurierte Zahl beschreiben. Mittels dieser Identitäten sollten im Weiteren die üblichen Termumformungsregeln formuliert und begründet werden. Obgleich für eine Figurierte Zahl mehrere dieser „Rezepte" in der IVK vorlagen, waren weder die (semantische) Beschreibungsgleichheit noch die syntaktische Ungleichheit der auftretenden Terme für die Schüler/innen der IVK ein sinnhafter Diskussionsgegenstand.

Es ist an dieser Stelle nicht klar, ob die Beschreibungsgleichheit der Terme zu offensichtlich war, als dass sie abstrahierend algebraisch formuliert werden könnte, oder der Prozess der De-Figurierung[14] einer Figurierten Zahl nicht ausreichend bewusst war.

4.1 Figurierung als Gegenprozess

Die verschiedenen „Rezepte" resultierten alle aus der gleichen Figurierten Zahl. Das Zielobjekt der Betrachtungen war also die Figurierte Zahl und die aufgestellten Terme sind zunächst also nur Eigenschaften dieses Objektes. Der entscheidende Punkt an dieser Stelle ist, ob die Frage der Lehrkraft nach der Gleichheit die Terme in den Fokus der Schüler/innen rückt, sodass diese als bedeutsame, untersuchungswürdige Objekte wahrgenommen werden.

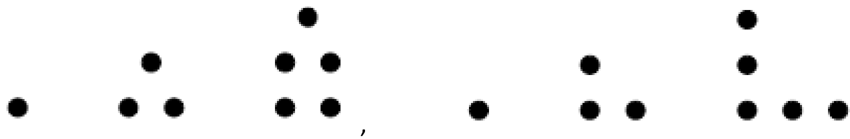
[13] Teilweise wurden Fragen der Art „In welchem Bild sind es 102 Punkte?" besprochen, um den Bildindex stärker zu fokussieren (vgl. Sauerwein 2020).

[14] Mit *De-Figurierung* bezeichnen wir den Abstraktionsprozess, bei dem einer Figurierten Zahl ausgehend von der ikonischen Repräsentation ein Zählterm zugeordnet wird.

Falls dem so ist oder dies zumindest angenommen wird, können Zahlenfolgen, wie

$$1, 3, 5, 7, \ldots,$$

betrachtet werden. Solche Folgen können dann zu verschiedenen Termen führen wie $2 \cdot n - 1$, $n + (n + 1)$ und $(n + 1)^2 - n^2$. Aufgrund der fehlenden ikonischen Repräsentation besitzen diese Terme eine andere Qualität, da sie Resultat induktiver „Mustererkennung“ (Berendonk 2015) sind. Ob zwei Terme gleich sind, kann ohne entsprechende Regeln nicht geklärt werden; durch Einsetzen kann eine Gleichheit einzig falsifiziert werden. Die verschiedenen Figurierungen der gegebenen Terme können jedoch verglichen und Gegenstand weiterer Diskussionen werden (mehr dazu in Sauerwein 2017). So hatten zwei Schüler/innen für den Term 2·n-1 die beiden folgenden Ideen:



Die erste Figurierung mit dem Punkt mittig über den beiden Spalten führte zu der Erkenntnis, dass das Verschieben einzelner Punkte nicht die Anzahl verändert und somit eine zulässige Manipulation ist. Wenn nun der oberste Punkt nach rechts geschoben wird, entstehen zwei unterschiedlich lange Spalten, deren Länge sich um 1 unterscheidet, also gerade die anschauliche Interpretation des Terms n+(n+1). Mit einem ähnlichen Argument (Verschieben von Punkten und Drehen des Bildes) konnte die zweite Figurierung mit der ersten in Verbindung gesetzt werden. Die zweite Figurierung ist schließlich die passende Idee für den dritten Term $(n+1)^2$ – n, da er die Differenz zweier aufeinander folgender Quadratzahlen darstellt (vgl. auch Abb. 2). Die Figurierung von Zahltermen (als Inversion der Konstruktion von Zahltermen aus der Bildsequenz) ermöglicht dann auch Verifizierungen und sogar Beweise.

Durch das Bewusstwerden des Figurierungsprozesses, der erheblich länger dauerte als der Prozess der De-Figurierung, wurde der Übergang für die Schüler/innen greifbarer. Die mehrfache Implementierung der Unterrichtseinheit zu Figurierten Zahlen hat gezeigt, dass das geduldige Durchlaufen des Figurierung- und De-

Figurierungsprozesses notwendig ist, um Figurierte Zahlen als Einstieg in die Algebra fruchtbar werden zu lassen.

4.2 Sprachlicher Entwicklungsaspekt

Die bisherigen Ausführungen fokussierten vor allem Figurierte Zahlen und deren Potential zur Stimulierung mathematischer Begriffsentwicklungen. Die Figurierten Zahlen wurden in ihrer Beschaffenheit aber auch im Hinblick auf die sprachlichen Komponenten der Heterogenität gewählt, es waren gleichberechtigt ebenso wichtige Sprachentwicklungen zu beobachten.

Die ikonische Darstellung der Figurierten Zahlen kann Träger verschiedener Strukturen sein. So nimmt jede/r Schüler/in das *Füllglas* auf eine bestimme Art und Weise wahr; in der Diskussion müssen diese Sichtweisen externalisiert werden. Dies kann zum Beispiel durch Inskriptionen in der diagrammatischen Darstellung, durch Gesten (für *Schneiden* und *Klappen* für die Symmetrie) oder durch Worte wie Zeile und Spalte geschehen. Allen diesen kommunikativen Mittel ist gemeinsam, dass sie von den Schüler/innen als bedeutsam wahrgenommen werden, da sie dabei helfen, sich über Figurierte Zahlen zu verständigen. Die Manipulationen an den Figurierten Zahlen werden andererseits internalisiert: Standen die Schüler/innen zu Beginn der Verschiebung einzelner Punkte ablehnend gegenüber, wurden schrittweise einzelne Manipulationen in der ikonischen Darstellung erlaubt, bevor diese gedanklich vollzogen werden konnten.

In diesem Prozess sind auch Ausprägungen einer sogenannten „Werkstattsprache“ (Winter 1978) zu beobachten. Die Entwicklung einer symbolischen Fachsprache, wie die der Algebra, sieht Winter stark verbunden mit informellen, vom Lernenden selbst erfundenen, Zwischen- bzw. „Werkstattsprachen“, die zwar vorläufigen Charakter haben, aber im Grunde den Bedeutungskern tragen. So sprachen einzelne Schüler/innen erst von „Geisterpunkten“ o.Ä., bevor sich dann in der Klasse der Bezeichnungsvorschlag der Lehrkraft („negativen Punkt“) durchsetzte: Solche Punkte können zur Ergänzung eines Musters genutzt werden; sie müssen aber am Ende der Rechnung wieder subtrahiert werden. Diese Einigung funktioniert aber nicht immer so problemlos: Nachdem die Klasse durchweg das Wort „Rezept“ nutzte, wollte die Lehrkraft den Fachterminus „Term“ einführen, danach sprach jeder in der Klasse vom „Termrezept“.

5. Schluss

Figurierte Zahlen eröffnen die Möglichkeiten für verschiedene Handlungsstränge und besitzen mathematisches und sprachliches Entwicklungspotential für Lernende. Abweichende Ideen können, solange sie sich am Gegenstand orientieren, fruchtbar werden. Insbesondere in dem Kontext einer IVK bieten sie Möglichkeiten an, Vorstellungen des Faches Mathematik zu hinterfragen, Bedürfnisse und Neugierde der Lernenden zu wecken und stückweise die Verantwortung für den Lernprozess wieder dem Lernenden in emanzipatorischer Art und Weise zu übergeben ohne diesen zu überfordern. Schule und insbesondere Unterricht kann dies jedoch nur anbieten.

Literatur

Berendonk, S. (2015): Wider den mathematikdidaktischen Induktivismus. In: Der Mathematikunterricht, 61, 6, 55-60.

Bruner, J.S. (1966): Toward a Theory of Instruction. Cambridge, London: Harvard University Press.

Deza, M. & Deza, E. (2012): Figurate Numbers. Singapore: World Scientific Publishing Company.

D'Ooge, M.L. (1926): Nichomachus of Gerasa – Introduction to Arithmetic. London, UK: The Macmillan Company.

Dörfler, W. (2006): Diagramme und Mathematikunterricht. In: Journal für Mathematik-Didaktik, 27, 3-4, 200-219.

Frege, G. (1891): Function und Begriff. Vortrag gehalten in der Sitzung vom 9. Januar 1891 der Jenaischen Gesellschaft für Medicin und Naturwissenschaft. Jena: Verlag Hermann Pohle.

Freudenthal, H. (1977): Mathematik als pädagogische Aufgabe. Band 1. Stuttgart: Ernst Klett Verlag.

Hefendehl-Hebeker, L. & Rezat, S. (2015): Algebra: Leitidee Symbol und Formalisierung. In: Bruder, R.; Hefendehl-Hebeker, L.; Schmidt-Thieme, B. & Weigand, H.-G. (Hrsg.): Handbuch der Mathematikdidaktik. Berlin, Heidelberg: Springer Spektrum, 117-148.

Jahnke, T. (2012): Die Regeldetri des Mathematikunterrichts. In: Beiträge zum Mathematikunterricht, 1, 413-416.

Jahnke, T. (2016). Ein nüchterner Blick auf die Anwendungsorientierung des Mathematikunterrichtes. In: Der Mathematikunterricht, 61, 1, 55-62.

Kvasz, L. (2008): Patterns of Change – Linguistic Innovations in the Development of Classical Mathematics. Basel: Birkhäuser.

Kvasz, L. (2012): Language in Change – Fernando Gil International Prize 2010. Lissabon: Fundacao Calouste Gulbenkian.

Leont'ev, A.N. (2012): Tätigkeit – Bewusstsein – Persönlichkeit. Berlin: Lehmanns Media.

Malle, G. (1993): Didaktische Probleme der elementaren Algebra. Wiesbaden: Springer Fachmedien.

Mason, J. (1996): Expressing generality and roots of algebra. In: Bednarz, N.; Kieran, C. & Lee, L. (Eds.): Approaches to Algebra: Perspectives for Research and Teaching. Dordrecht: Kluwer Academic Publisher, 65-86.

Meyer, M. & Tiedemann, K. (2017): Sprache im Fach Mathematik. Berlin: Springer Spektrum.

Prediger, S. & Krägeloh, N. (2015): “x-arbitrary means any number, but you do not know which one” – The epistemic role of languages while constructing meaning for the variable as generalizers. In: Halal, A. & Clarkson, P. (Eds.): Teaching and Learning Mathematics in Multilingual Classrooms: Issues for policy, practice and teacher education. Rotterdam: Sense Publisher, 89-108.

Sauerwein, M. (2017): Figurierte Zahlen als Zugang zu Termumformungen – Unterrichtsentwicklung mit Lehrkräften. In: Institut für Mathematik der Universität Potsdam (Hrsg.): Beiträge zum Mathematikunterricht. Münster: WTM-Verlag, 813-816.

Sauerwein, M. (2018): Sprechen über Figurierte Zahlen – Punktmuster, Zahlenfolgen und Terme zugleich. In: Fachgruppe Didaktik der Mathematik der Universität Paderborn (Hrsg.): Beiträge zum Mathematikunterricht. Münster: WTM-Verlag, 1543-1546.

Sauerwein, M. (2020). Figurierte Zahlen als produktiver Weg in die Mathematik. Ein Entwicklungsforschungsprojekt im Kontext einer Internationalen Vorbereitungsklasse. Wiesbaden: Springer Spektrum.

Schupp, H. (2008): Zur Einführung. In: Der Mathematikunterricht, 54, 4, 2-3.

Wessel, L. & Sprütten, F. (2018): Mathematik und Unterrichtssprache lernen. In: mathematiklehren 206, 18-22.

Winter, H. (1978): Umgangssprache – Fachsprache im Mathematikunterricht. In: Schriftenreihe des IDM, 18, 5-56.

Winter, H. (1983): Über die Entfaltung begrifflichen Denkens im Mathematikunterricht. In: Journal für Mathematik-Didaktik, 4, 3, 175-204.

Winter, H. (1995): Mathematikunterricht und Allgemeinbildung. In: Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik, 61, 37-46.

Sachregister

Personenregister